Többváltozós analízis gyakorlat

Általános iskolai matematikatanár szak
2017/2018. őszi félév

Ajánlott irodalom (sok gyakorló feladat, megoldásokkal):
Thomas-féle kalkulus 3., Typotex, 2007. (Jól használhatók az 1-2. kötetek is)
Fekete Z. - Zalay M.: *Többváltozós függvények analízise*, Műszaki Könyvkiadó, 2006.
Denkinger G. - Gyurkó L.: *Analízis gyakorlatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.
Gémes Margit - Szentmiklóssy Zoltán: *Analízis feladatgyűjtemény I.*,
`http://etananyag.ttk.elte.hu/download.php?view.100`.

1. Ismétlés

1. Keressük meg azokat a helyeket, ahol a $\sin x$ függvény érintője párhuzamos az
   (a) x tengellyel;
   (b) az $y = x$ egyenessel.
2. Írjuk fel az $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ függvény grafikonjának érintőjét az $(1, 6)$ pontban!
3. Adjuk meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!
   (a) $f(x) = 3x^8 - \frac{3}{4}x^6 + 2$
   (b) $f(x) = \frac{5x+3}{2x-1}$
   (c) $f(x) = x + \frac{1}{x} + \sqrt{x}$
   (d) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt[3]{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^3}}}$
   (e) $f(x) = \sin^5 5x$
   (f) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
   (g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
   (h) $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$
   (i) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
   (j) $f(x) = \ln\ln x$
   (k) $f(x) = \arcsin 2x$
   (l) $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$
   (m) $f(x) = \ln 10^x$
4. Végezzük el az $f(x) = (x+2) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ képlettel megadott függvény teljes körű vizsgálatát!
5. Számítsuk ki a $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ határértéket!
6. Határozzuk meg a következő primitív függvényeket!
   (a) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) dx$
   (b) $\int \frac{-5}{x-7}\, dx$
   (c) $\int \mathrm{e}^{2x-3}\, dx$
   (d) $\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}\, dx$
   (e) $\int \frac{1}{6+6x^2}\, dx$
   (f) $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\, dx$
   (g) $\int \mathrm{e}^x \cdot \sqrt{(\mathrm{e}^x + 2005)^{27}}\, dx$
   (h) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$
   (i) $\int (\arcsin x)^2\, dx$
   (j) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{1+x}\, dx$
   (k) $\int \frac{x^3}{x^8+3}\, dx$
7. Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálok értékét!
   (a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\, dx$
   (b) $\int_{0.2}^{0.6} \arcsin x\, dx$
   (c) $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}}\, dx$
   (d) $\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+1}\, dx$

2. Differenciál- és integrálszámítás alkalmazásai

1. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek összes, valamint a megadott feltételeket kielégítő megoldásait!

   (a) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

   (b) $y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)}$

   (c) $y'(x) = x \cdot y(x), \quad y(1) = 1$

   (d) $y'(x) = 4x \cdot \sqrt{y(x)}$

   (e) $y'(x) = \lambda \cdot y(x)\ (\lambda \in \mathbb{R}), \quad y(0) = -2$

   (f) $(1 + \mathrm{e}^x) \cdot y'(x) = y(x) \cdot \mathrm{e}^x$

   (g) $y'(x) = (x + y(x))^2$

   (h) $y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{x+1}{x} \cdot \mathrm{e}^x, \quad y(1) = \mathrm{e}$

   (i) $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x \cdot \sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

   (j) $y'(x) + \dfrac{2}{x} \cdot y(x) = x^3, \quad y(1) = -\dfrac{5}{6}$

   (k) $y'(x) + 2x \cdot y(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \sin x, \quad y(0) = 1$

   Megoldási módszerek:

   I. Szétválasztható egyenletek: $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$. Átalakítva: $y'(x)/g(y(x)) = f(x)$ olyan intervallumon, melyen a nevező nem 0. Jelölje G az $\frac{1}{g}$, F az f egy primitív függvényét. Ekkor a fenti egyenlet: $(G \circ y)' = F'$, amiből $G(y(x)) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Ebből szerencsés esetben y ki is fejezhető.
   II. Lineáris egyenletek: $y'(x) = f(x) \cdot y(x) + g(x)$, $f, g \in C(I)$.
   1. lépés: homogén egyenlet megoldása $y'(x) = f(x) \cdot y(x)$. Ez egy szétválasztható változójú egyenlet. $\ln|y(x)| = F(x) + c$, ahol $F' = f$. Ebből $|y(x)| = C \cdot \mathrm{e}^{F(x)}$, $C > 0$.
   2. lépés: inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = c(x) \cdot \mathrm{e}^{F(x)}$ alakban. Ebből

   $$y'(x) = c'(x) \cdot \mathrm{e}^{F(x)} + c(x) \cdot \mathrm{e}^{F(x)} \cdot f(x) = f(x) \cdot c(x) \cdot \mathrm{e}^{F(x)} + g(x),$$

   amiből $c'(x) \cdot \mathrm{e}^{F(x)} = g(x)$, tehát $c'(x) = g(x) \cdot \mathrm{e}^{-F(x)}$. Innen c-t kifejezve nyerjük az y megoldást.

2. Számoljuk ki az alábbi improprius integrálokat!

   (a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x - 2}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-3x}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2}{1 + x^2}\,dx$

   (e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

   (f) $\displaystyle\int_0^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

3. Határozzuk meg az f és g függvények grafikonjai által bezárt tartomány területét!

   (a) $f(x) = x^2,\ g(x) = -x + 2$

   (b) $f(x) = -x^2 + 2x,\ g(x) = -x$

   (c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2},\ g(x) = 0$

   (d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2},\ g(x) = -x + 1$

4. A következő függvények esetén határozzuk meg a függvény grafikonjának ívhosszát a $|\Gamma(f)| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ képlet segítségével!

   (a) $\mathcal{D}(f) = [0, 5],\ f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

   (b) $\mathcal{D}(f) = [0, 4],\ f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

5. A következő függvények grafikonját megforgatva az x tengely körül, mekkora térfogatú forgástestet kapunk? Használjuk a $V(A) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$ képletet!

   (a) $\mathcal{D}(f) = [0, \pi],\ f(x) = \sin x$

   (b) $\mathcal{D}(f) = [-1, 1],\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

   (c) $\mathcal{D}(f) = [0, 1],\ f(x) = x^2$

   (d) $\mathcal{D}(f) = [1, 4],\ f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

3. Kétváltozós függvények

1. Írjuk fel a $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{p} = (-1, 3)$ és a $\mathbf{q} = (5, -4)$ pontok távolságát!

2. Írjuk fel az origó ill. az $\mathbf{u} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ pont körüli 1 ill. $r > 0$ sugarú nyílt gömböt meghatározó egyenlőtlenségeket!

3. Rajzoljuk le az alábbi halmazokat! Határozzuk meg belső, külső és határpontjaikat! Döntsük el mindegyikről, hogy nyílt, zárt, ill. korlátos halmaz-e!

   (a) $\{h \in \mathbb{R} : -3 < h \leq 5\}$;

   (b) $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\big\}$;

   (c) $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\big\}$;

   (d) $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\big\}$;

   (e) $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 < x < 5\big\}$;

   (f) $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x, y \leq 1\big\}$.

4. Számítsuk ki a következő függvények helyettesítési értékét a megadott $\mathbf{p}$ pontokban!

   (a) $f(x, y) = x + y^2$, $\mathbf{p} = (2, 3)$;

   (b) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg} x + \arcsin xy$, $\mathbf{p} = (1, 0)$.

5. Adjuk meg a következő függvények helyettesítési értékét a megadott görbék pontjaiban!

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\quad y = x$, ill. $x^2 + y^2 = 1$,

   (b) $f(x, y) = x - y$, $\quad y = x$, ill. $y = x^2$.

6. Ábrázoljuk a következő függvények szintvonalait! Készítsünk a függvények grafikonjairól térbeli rajzot!

   (a) $f(x, y) = (x + y)^2$;

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

   (c) $f(x, y) = xy$;

   (d) $f(x, y) = x^2 + y^2$;

   (e) $f(x, y) = x^2 - y^2$;

   (f) $f(x, y) = x^2$.

7. Van-e a következő kétváltozós függvényeknek határértéke az adott pontokban? Ha igen, mennyi? Hol folytonosak ezek a függvények?

   (a) $f(x, y) = 6$, $\quad \mathbf{p} = (0, 0)$;

   (b) $f(x, y) = x + y$, $\quad \mathbf{p} = (3, 5)$;

   (c) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$, $\quad \mathbf{p} = (3, 0)$;

   (d) $f(x, y) = \dfrac{\sin xy}{x}$, $\quad \mathbf{p} = (0, 2)$;

   (e) $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \text{ és } y \neq 0, \\ 0, & x = 0 \text{ vagy } y = 0. \end{cases}$, $\quad \mathbf{p} = (0, 0)$, $\mathbf{q} = (0, 1)$;

   (f) $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$, $\quad \mathbf{p} = (0, 0)$, $\mathbf{q} = (0, 1)$, $\mathbf{r} = (1, 0)$;

   (g) $f(x, y) = \begin{cases} x, & x = y, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$, $\quad \mathbf{p} = (0, 0)$, $\mathbf{q} = (0, 1)$.

8. Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

   Bizonyítsuk be, hogy a $g(x) = f(x, 0)$ és $h(y) = f(0, y)$ függvények folytonosak $x = 0$-ban ill. $y = 0$-ban! Mutassuk meg, hogy az $f(x, y)$ függvény nem folytonos $(x, y) = (0, 0)$-ban!

4. Parciális deriválás

1. Adjuk meg az alábbi függvények parciális deriváltfüggvényeit!

(a) $f(x,y)=x$

(b) $f(x,y)=x^2y$

(c) $f(x,y)=x^2-2xy+y^2-x+1$

(d) $f(x,y)=(x^3-2x^2y+y^2)^7$

(e) $f(x,y)=\sqrt{x^2y^2-1}$

(f) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$

(g) $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\sqrt{2x-y}}$

(h) $f(x,y)=xy\cos x^2y^2$

(i) $f(x,y)=xy\ln(x+y)$

(j) $f(x,y)=\frac{1}{x\sin\frac{1}{y}}$

(k) $f(x,y)=2^{-\frac{x}{y}}$

(l) $f(x,y)=\frac{x^2+3xy-1}{y^2+3xy-1}$

(m) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2y^2}$

(n) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$

(o) $f(x,y)=\frac{x\arcsin y}{y\arccos x}$

(p) $f(x,y)=x^y$

2. Adjuk meg az alábbi függvények első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeit!

(a) $f(x,y)=x^3-3x^2y+xy^2+y^3$

(b) $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$

(c) $f(x,y)=\sin x\cos y$

(d) $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$

(e) $f(x,y)=\ln\frac{x+y}{x-y}$

(f) $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x-y}$

Parciális derivált

I. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(a,b)\in\mathrm{int}\mathcal{D}(f)$. Az f függvény x *szerinti* vagy *első változó szerinti parciális deriváltja létezik* (a,b)*-ben*, ha

$$\exists\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\in\mathbb{R}.$$

Jelölés: $\partial_x f(a,b)$ vagy $\partial_1 f(a,b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ vagy $f'_x(a,b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az (a,b) pont 2. koordinátáját lerögzítjük, és az így kapott $x\mapsto f(x,b)$ egyváltozós függvényt deriváljuk a-ban.

II. Az f függvény y *szerinti* vagy *második változó szerinti parciális deriváltja létezik* (a,b)*-ben*, ha

$$\exists\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}\in\mathbb{R}.$$

Jelölés: $\partial_y f(a,b)$ vagy $\partial_2 f(a,b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ vagy $f'_y(a,b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az (a,b) pont 1. koordinátáját lerögzítjük, és az így kapott $y\mapsto f(a,y)$ egyváltozós függvényt deriváljuk b-ben.

III. Az f függvény x *ill.* y *szerinti (vagy elsőrendű) parciális deriváltfüggvényei* $\partial_x f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ill. $\partial_y f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$\mathcal{D}(\partial_x f)=\{(x,y)\in\mathrm{int}\mathcal{D}(f):\exists\partial_x f(x,y)\},\quad (\partial_x f)(x,y):=\partial_x f(x,y)$$
$$\mathcal{D}(\partial_y f)=\{(x,y)\in\mathrm{int}\mathcal{D}(f):\exists\partial_y f(x,y)\},\quad (\partial_y f)(x,y):=\partial_y f(x,y)$$

IV. Az f *másodrendű parciális deriváltjait* az x ill. y szerinti parciális deriváltfüggvényeinek további parciális deriváltjaiból nyerjük:

$$\partial_{xx}f:=\partial_x(\partial_x f),\ \partial_{xy}f:=\partial_x(\partial_y f),\ \partial_{yx}f:=\partial_y(\partial_x f),\ \partial_{yy}f:=\partial_y(\partial_y f)$$

5. Kétváltozós szélsőértékszámítás

1. Állapítsuk meg a következő függvényekről, hogy van-e lokális szélsőértékük, és ha igen, hol, és ezek mekkorák!

   (a) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$;

   (b) $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4$;

   (c) $f(x, y) = \mathrm{e}^{2x+3y} \cdot (8x^2 - 6xy + 3y^2)$;

   (d) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$;

   (e) $f(x, y) = (x^2 - 6x) \cdot (y^2 - 4y)$;

   (f) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1$;

   (g) $f(x, y) = (1 - x)^2 + (2 + y)^2 - 4$;

   (h) $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 - 4$;

   (i) $f(x, y) = y^3 - x^2 - 4y^2 + 2xy$;

   (j) $f(x, y) = (3 - 2x + y) \cdot \mathrm{e}^{-y^2}$.

2. Szöveges feladatok szélsőértékszámításra (tartomány alatt itt mindig zárt halmazt értünk).

   (a) Határozzuk meg a $z = 4 - x^2 - 2y^2$ egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy-sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest oldalai párhuzamosak a koordinátasíkokkal!

   (b) Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény minimumát és maximumát az x és y tengelyek, valamint az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű görbe által határolt tartomány 1. síknegyedbe eső részén!

   (c) Határozzuk meg az $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ függvény maximumát, ha x, y, z egy háromszög szögei!

   (d) Határozzuk meg az $f(x, y) = y \cdot (2x - 3)$ függvény minimumát és maximumát az x-tengely, az $x = 2$ és az $y = x^2$ görbék által határolt tartományon!

2×2-es mátrix definitsége. Legyen $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 2×2-es mátrix. Ha $\det C > 0$ és $a > 0$, akkor C *pozitív definit*, ha $\det C > 0$ és $a < 0$, akkor C *negatív definit*. A $b = c$ (*szimmetrikus* mátrix) esetben ha $\det C = 0$, akkor C *(pozitív vagy negatív) szemidefinit*, ha $\det C < 0$, akkor C *indefinit*.

Tétel lokális szélsőérték létezéséről. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az $(a, b) \in \mathrm{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy $\partial_x f(a, b) = \partial_y f(a, b) = 0$. Ha az

$$f''(a, b) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(a, b) & \partial_{yx} f(a, b) \\ \partial_{xy} f(a, b) & \partial_{yy} f(a, b) \end{pmatrix}$$

(a feltételek alapján szimmetrikus) mátrix pozitív/negatív definit, akkor f-nek szigorú lokális minimuma/maximuma van (a, b)-ben. Ha a mátrix indefinit, akkor f-nek nincs lokális szélsőértéke (a, b)-ben.

Tétel korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény abszolút szélsőértékéről. Legyen f az A korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény, és tegyük fel, hogy f-nek léteznek a parciális deriváltjai $\mathrm{int}A$ pontjaiban. Ekkor f a legkisebb és legnagyobb értékét vagy ∂A-n veszi fel, vagy $\mathrm{int}A$ egy olyan pontjában, ahol $\partial_x f(a, b) = \partial_y f(a, b) = 0$.

6. Ívhossz, vonalintegrál

1. Határozzuk meg a következő görbék ívhosszát!

   (a) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (r\cos t, r\sin t)$ $(r > 0)$ (körvonal)

   (b) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t)$ $(r > 0)$ (ciklois)

   (c) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (r\cos^3 t, r\sin^3 t)$ $(r > 0)$ (asztroid)

   (d) $g\colon [0,h] \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (t, r\cos t, r\sin t)$ $(h, r > 0)$ (csavarvonal)

2. Legyen $f : [1,4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$. Határozzuk meg f grafikonjának ívhosszát!

3. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált, ha $f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ és

   (a) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$

   (b) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (-\cos t, \sin t)$

4. Legyen g a felső félsíkba eső, origó középpontú egység sugarú félkörív pozitív irányítással, továbbá legyen $f(x,y) = (-y, x)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

5. Legyen g a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontokat összekötő egységsugarú körív negatív irányítással, továbbá legyen $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{x}\right)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

6. Legyen g a $(2,0)$, $(0,2)$ pontokat összekötő szakasz a $(0,2)$ pont felé irányítva, továbbá legyen $f(x,y) = (\cos y, \cos x)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

Ívhossz. Legyen $g : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható. Ekkor g ívhossza

$$s(g) = \int_a^b |g'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(g_1'(t))^2 + \cdots + (g_p'(t))^2}\, dt.$$

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor f grafikonjának ívhossza

$$s(g) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

Vonalintegrál. Legyen $g : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható, $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}^p$. Ekkor f vonalintegrálja a g görbe mentén

$$\int_g f = \int_a^b \langle f(g(t)), g'(t)\rangle\, dt = \int_a^b \big(f_1(g(t)) \cdot g_1'(t) + \cdots + f_p(g(t)) \cdot g_p'(t)\big)\, dt.$$

7. Kétdimenziós integrál

1. Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvények integrálját a T tartományon!
   - (a) $f(x,y):=x+y,\qquad T:=[1,2]\times[3,4]$;
   - (b) $f(x,y):=\exp(x+y),\qquad T:=[0,1]\times[0,1]$;
   - (c) $f(x,y):=\frac{x^2}{1+y^2},\qquad T:=[0,1]\times\left[0,\sqrt{3}\right]$;
   - (d) $f(x,y):=x\cdot\cos(x+y),\qquad T:=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;
   - (e) $f(x,y):=xy\cdot\sin\left(x^2+y^2\right),\qquad T:=\left[0,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]\times\left[0,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$;
   - (f) $f(x,y):=x^2\exp(xy),\qquad T:=[0,1]\times[0,2]$;
   - (g) $f(x,y):=\frac{1}{(1+x+y)^2},\qquad T:=[0,a]\times[0,a]\ (a\in\mathbb{R}^+)$.

2. Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvények integrálját a T tartományon!
   - (a) $f(x,y):=x^2+y^2,\qquad T:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1],x^2\le y\le x\right\}$;
   - (b) $f(x,y):=y^3+2xy,\qquad T$ a $K_1:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4, y\ge 0\right\}$,
     a $K_2:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+1)^2+y^2=1, y\le 0\right\}$ és
     a $K_3:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2=1, y\ge 0\right\}$
     félkörök által határolt tartomány;
   - (c) $f(x,y):=\frac{x+1}{y^2+1},\qquad T:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1],x\le y\le x\sqrt{3}\right\}$;
   - (d) $f(x,y):=x^2+xy,\qquad T:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-r,r],\ 0\le y\le \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right\}$.

Fubini tétele. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ és $[c,d]$ korlátos és zárt intervallumok, jelölje $[a,b]\times[c,d]$ a megfelelő téglalapot. Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a,b]\times[c,d]$-n, és
(A) $\forall x\in[a,b]$ esetén az $y\mapsto f(x,y)$, $y\in[c,d]$ ún. „szekciófüggvény" Riemann-integrálható $[c,d]$-n,
vagy
(B) $\forall y\in[c,d]$ esetén az $x\mapsto f(x,y)$, $x\in[a,b]$ ún. „szekciófüggvény" Riemann-integrálható $[a,b]$-n.
Ekkor az (A) esetben $\varphi(x):=\int_c^d f(x,y)dy$, $x\in[a,b]$ jelöléssel φ Riemann-integrálható $[a,b]$-n, emellett

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b \varphi(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

A (B) esetben pedig $\psi(y):=\int_a^b f(x,y)dx$, $y\in[c,d]$ jelöléssel ψ Riemann-integrálható $[c,d]$-n, emellett

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d \psi(y)\,dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Ha az (A) és (B) feltételek is teljesülnek, akkor

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy,$$

vagyis az x és y szerinti integrálás sorrendje felcserélhető, és az így kapott integrálok értékei megegyeznek a függvény kétdimenziós integráljával.

Normáltartományon vett integrál. Legyen $H\subset\mathbb{R}^2$ y irányú vagy x irányú *normáltartomány*, vagyis φ_1,φ_2 folytonos függvények $[a,b]$-n, és

(1) $H=\{(x,y)\in[a,b]\times\mathbb{R} : \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$, vagy (2) $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times[a,b] : \varphi_1(y)\le x\le\varphi_2(y)\}$.

Legyen $f:H\to\mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az (1) esetben

$$\int_H f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx,$$

a (2) esetben pedig

$$\int_H f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy.$$