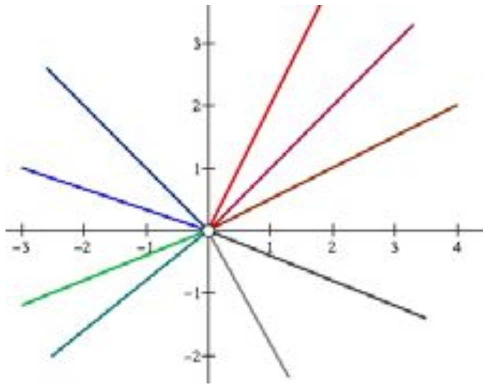
Többváltozós analízis gyakorlat, megoldások

Általános iskolai matematikatanár szak
2017/2018. őszi félév

2. Differenciál- és integrálszámítás alkalmazásai

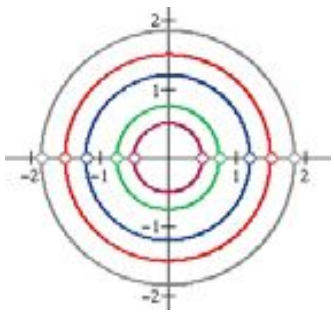
1. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek összes, valamint a megadott feltételeket kielégítő megoldásait!

   (a) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x}$
   Megoldás: Olyan intervallumokon keressük, ahol $0 \notin I$.
   1. konstans megoldások: $y'(x) = 0\ \forall x \in I \Rightarrow y(x) = 0\ \forall x \in I$.
   2. $y(x) \neq 0\ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln|y(x)| = \ln|x| + c \Rightarrow |y(x)| = |x| \cdot \mathrm{e}^c$
   Összes megoldás: $y(x) = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$ vagy $\mathcal{D}(y) = (-\infty, 0)$



1. ábra. (a) feladat

   (b) $y'(x) = -\dfrac{x}{y(x)}$
   Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük.
   1. konstans megoldás: nincs, ui. $y'(x) = 0\ \forall x \in I \Leftrightarrow x = 0$
   2. $y'(x) \cdot y(x) = -x \Rightarrow \frac{1}{2}y^2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}c^2$
   Összes megoldás: $y(x) = \sqrt{-x^2 + c^2}$ és $y(x) = -\sqrt{-x^2 + c^2}$, $\mathcal{D}(y) = (-c, c)$ $(c \in \mathbb{R}^+)$



2. ábra. (b) feladat

(c) $y'(x) = x \cdot y(x), \quad y(1) = 1$

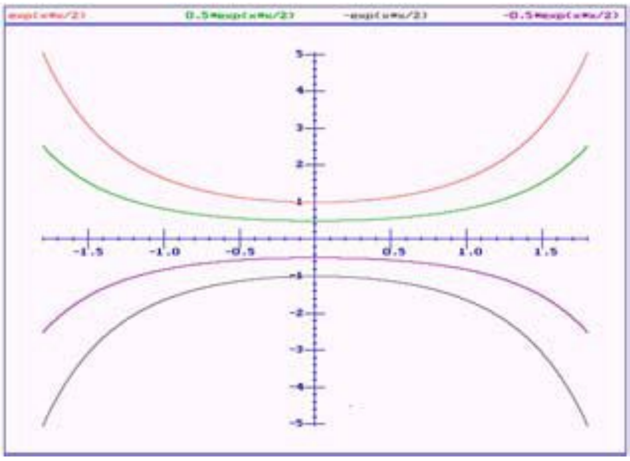
Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük.

1. konstans megoldások: $y'(x) = 0 \ \forall x \in I \Rightarrow y(x) = 0 \ \forall x \in I$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$

2. $y(x) \neq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = x \Rightarrow \ln|y(x)| = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow |y(x)| = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \cdot \mathrm{e}^c$

Összes megoldás: $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$

3. Kezdetiérték-feladat: $y(1) = 1 \Rightarrow c \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow c = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{2}}$



3. ábra. (c) feladat

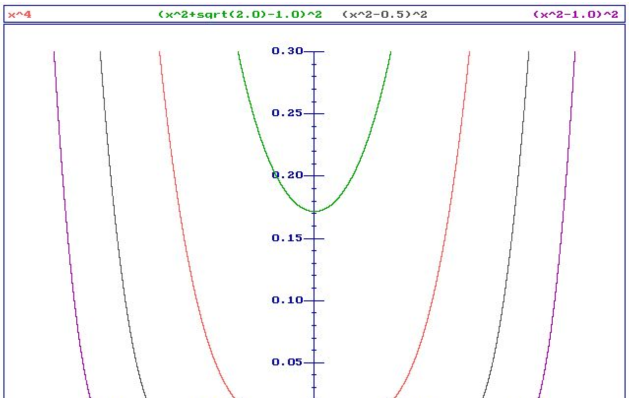
(d) $y'(x) = 4x \cdot \sqrt{y(x)}$

Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük.

1. konstans megoldások: $y'(x) = 0 \ \forall x \in I \Rightarrow y(x) = 0 \ \forall x \in I$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$

2. $y(x) \neq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} = 2x \Rightarrow \sqrt{y(x)} = x^2 + c$

Összes megoldás: $y(x) = (x^2 + c)^2$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$, ha $c \geq 0$, és $\mathcal{D}(y) = (\sqrt{|c|}, +\infty)$ vagy $\mathcal{D}(y) = (-\infty, -\sqrt{|c|})$, ha $c < 0$



4. ábra. (d) feladat

(e) $y'(x) = \lambda \cdot y(x) \, (\lambda \in \mathbb{R}), \quad y(0) = -2$

Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük.

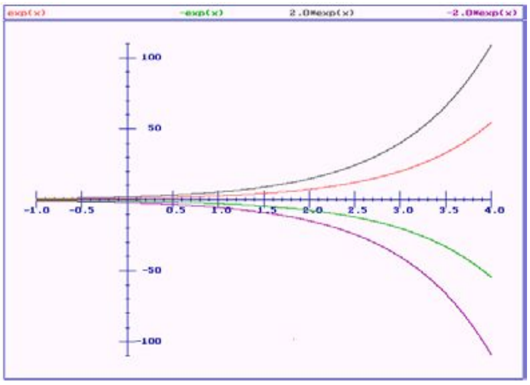
1. konstans megoldások: $y'(x) = 0 \ \forall x \in I \Rightarrow y(x) = 0 \ \forall x \in I$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$

2. $y(x) \neq 0 \ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \lambda \Rightarrow \ln|y(x)| = \lambda \cdot x + c \Rightarrow |y(x)| = \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot \mathrm{e}^c$

Összes megoldás: $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot c$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$

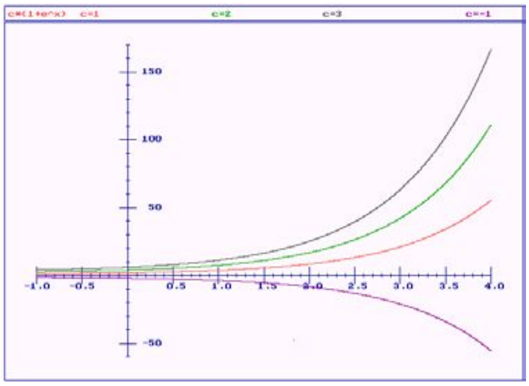
3. Kezdetiérték-feladat: $y(0) = -2 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow y(x) = -2\mathrm{e}^{\lambda x}$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$

(f) $(1 + \mathrm{e}^x) \cdot y'(x) = y(x) \cdot \mathrm{e}^x$



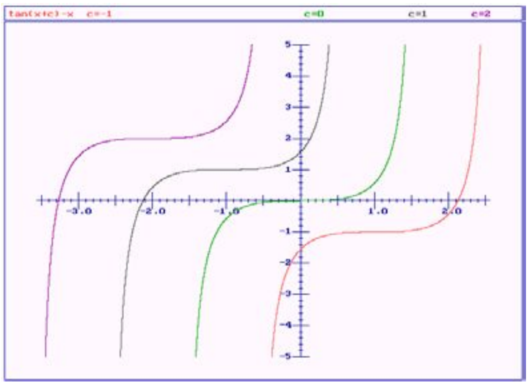
5. ábra. (e) feladat

Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük.
1. konstans megoldások: $y'(x) = 0\ \forall x \in I \Rightarrow y(x) = 0\ \forall x \in I$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$
2. $y(x) \neq 0\ \forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \Rightarrow \ln|y(x)| = \ln(1+\mathrm{e}^x) + c \Rightarrow |y(x)| = (1+\mathrm{e}^x) \cdot \mathrm{e}^c$
Összes megoldás: $y(x) = (1+\mathrm{e}^x) \cdot c$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$



6. ábra. (f) feladat

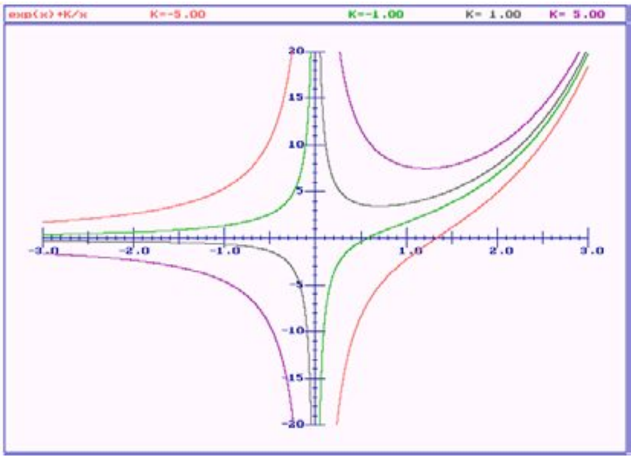
(g) $y'(x) = (x + y(x))^2$
Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük. Alkalmazzuk a $z(x) = x + y(x)$ helyettesítést! Ekkor $z'(x) - 1 = z^2(x) \Rightarrow \frac{z'(x)}{1+z^2(x)} = 1 \Rightarrow \arctan z(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, $x + c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$ $z(x) = \tan(x + c) \Rightarrow y(x) = \tan(x + c) - x$, $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = (-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c)$



7. ábra. (g) feladat

(h) $y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{x+1}{x} \cdot \mathrm{e}^x, \quad y(1) = \mathrm{e}$

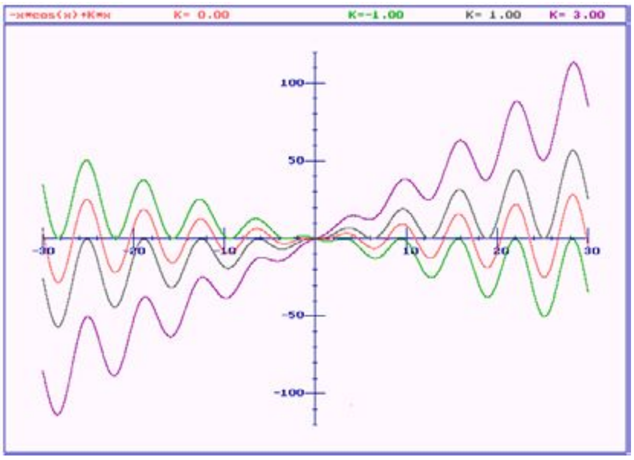
Megoldás: Olyan intervallumokon keressük, ahol $0 \notin I$.
1. homogén egyenlet megoldása: $y'(x) = -\frac{y(x)}{x} \Rightarrow$ ha $y(x) \neq 0$ $\forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x} \Rightarrow$ $\ln|y(x)| = -\ln|x| + c \Rightarrow |y(x)| = \mathrm{e}^c \cdot \frac{1}{|x|} \Rightarrow y(x) = \frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$
2. inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = \frac{c(x)}{x}$ alakban, behelyettesítve:
$c'(x) \cdot \frac{1}{x} - c(x) \cdot \frac{1}{x^2} + c(x) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x} \cdot \mathrm{e}^x \Rightarrow c'(x) = (x+1) \cdot \mathrm{e}^x$, parciális integrálással $c(x) = x \cdot \mathrm{e}^x + K$, $K \in \mathbb{R}$
Összes megoldás: $y(x) = \mathrm{e}^x + \frac{K}{x}$, $K \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$ vagy $\mathcal{D}(y) = (-\infty, 0)$
3. Kezdetiérték-feladat: $y(1) = \mathrm{e} \Rightarrow \mathrm{e} + K = \mathrm{e} \Rightarrow K = 0 \Rightarrow y(x) = \mathrm{e}^x$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$



8. ábra. (h) feladat

(i) $y'(x) - \dfrac{y(x)}{x} = x \cdot \sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

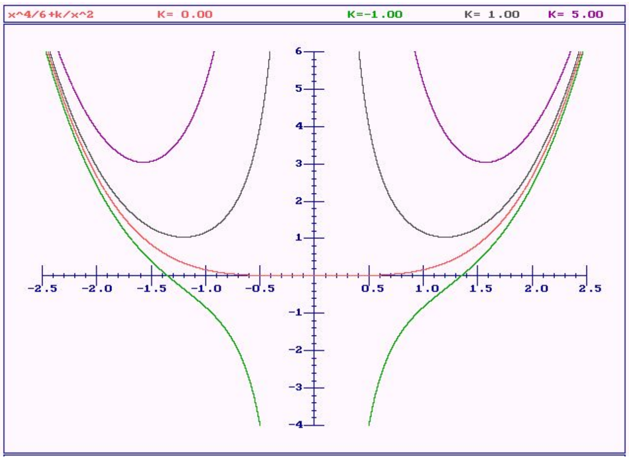
Megoldás: Olyan intervallumokon keressük, ahol $0 \notin I$.
1. homogén egyenlet megoldása: $y'(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow$ ha $y(x) \neq 0$ $\forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow$ $\ln|y(x)| = \ln|x| + c \Rightarrow |y(x)| = \mathrm{e}^c \cdot |x| \Rightarrow y(x) = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$
2. inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = c(x) \cdot x$ alakban, behelyettesítve:
$c'(x) \cdot x + c(x) - c(x) = x \cdot \sin x \Rightarrow c'(x) = \sin x \Rightarrow c(x) = -\cos x + K$, $K \in \mathbb{R}$
Összes megoldás: $y(x) = -x \cdot \cos x + K \cdot x$, $K \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$ vagy $\mathcal{D}(y) = (-\infty, 0)$
3. Kezdetiérték-feladat: $y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow K \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow K = \frac{2}{\pi} \Rightarrow y(x) = -x \cdot \cos x + \frac{2x}{\pi}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$



9. ábra. (i) feladat

(j) $y'(x) + \dfrac{2}{x} \cdot y(x) = x^3, \quad y(1) = -\dfrac{5}{6}$

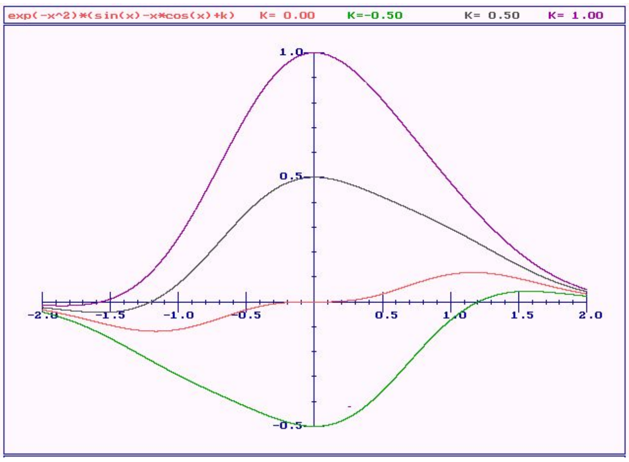
Megoldás: Olyan intervallumokon keressük, ahol $0 \notin I$.
1. homogén egyenlet megoldása: $y'(x) = -\frac{2}{x} \cdot y(x) \Rightarrow$ ha $y(x) \neq 0$ $\forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{2}{x} \Rightarrow$ $\ln|y(x)| = -2\ln|x| + c \Rightarrow |y(x)| = \mathrm{e}^c \cdot \frac{1}{x^2} \Rightarrow y(x) = c \cdot \frac{1}{x^2}$, $c \in \mathbb{R}$
2. inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = \frac{c(x)}{x^2}$ alakban, behelyettesítve:
$c'(x) \cdot \frac{1}{x^2} - 2c(x) \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{2c(x)}{x^3} = x^3 \Rightarrow c'(x) = x^5 \Rightarrow c(x) = \frac{x^6}{6} + K$, $K \in \mathbb{R}$
Összes megoldás: $y(x) = \frac{1}{6} \cdot x^4 + \frac{K}{x^2}$, $K \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$ vagy $\mathcal{D}(y) = (-\infty, 0)$
3. Kezdetiérték-feladat: $y(1) = -\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{6} + K = -\frac{5}{6} \Rightarrow K = -1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{6} \cdot x^4 - \frac{1}{x^2}$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$



10. ábra. (j) feladat

(k) $y'(x) + 2x \cdot y(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \sin x, \quad y(0) = 1$

Megoldás: $I \subset \mathbb{R}$ intervallumokon keressük.
1. homogén egyenlet megoldása: $y'(x) = -2x \cdot y(x) \Rightarrow$ ha $y(x) \neq 0$ $\forall x \in I \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -2x \Rightarrow$ $\ln|y(x)| = -x^2 + c \Rightarrow |y(x)| = \mathrm{e}^c \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \Rightarrow y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$, $c \in \mathbb{R}$
2. inhomogén egyenlet megoldása $y(x) = c(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$ alakban, behelyettesítve:
$c'(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} - 2x \cdot c(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + 2x \cdot c(x) \cdot \mathrm{e}^{-x^2} = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \sin x \Rightarrow c'(x) = x \cdot \sin x$, parciális integrálással $c(x) = -x \cdot \cos x + \sin x + K$, $K \in \mathbb{R}$
Összes megoldás: $y(x) = (-x \cdot \cos x + \sin x + K) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$, $K \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$
3. Kezdetiérték-feladat: $y(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow y(x) = (-x \cdot \cos x + \sin x + 1) \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$, $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R}$

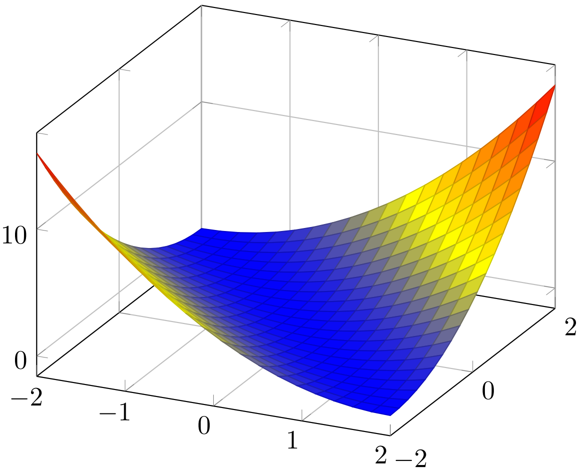


11. ábra. (k) feladat

3. Kétváltozós függvények

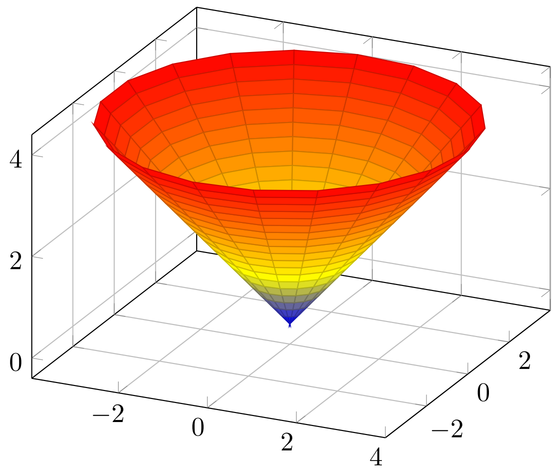
6. Ábrázoljuk a következő függvények szintvonalait! Készítsünk a függvények grafikonjairól térbeli rajzot!

   (a) $f(x, y) = (x + y)^2$;



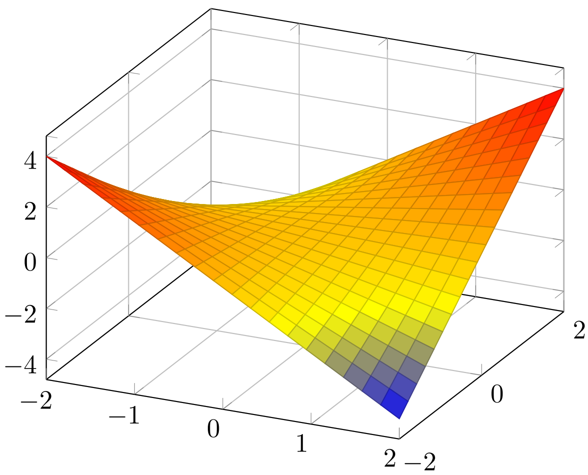
12. ábra. $f(x, y) = (x + y)^2$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;



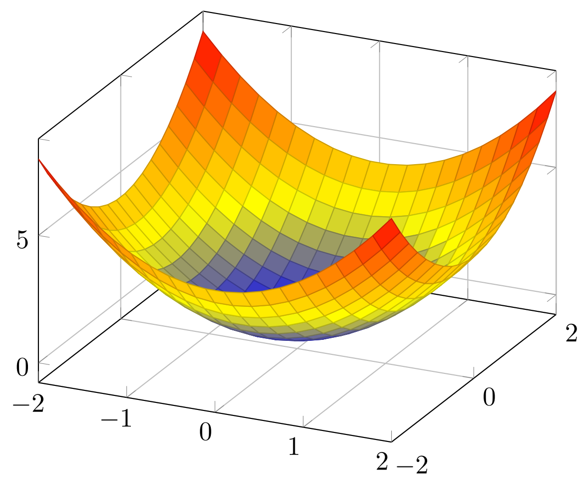
13. ábra. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $f(x, y) = xy$;



14. ábra. $f(x, y) = xy$

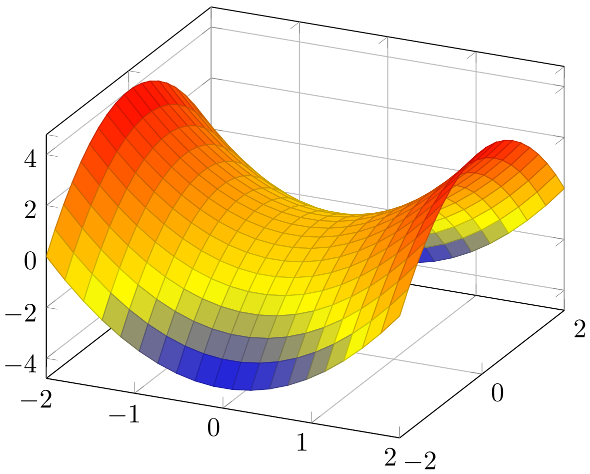
(d) $f(x, y) = x^2 + y^2$;



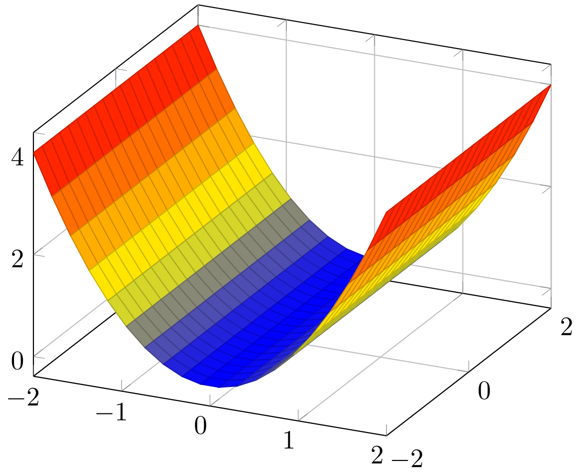
15. ábra. $f(x, y) = x^2 + y^2$

(e) $f(x, y) = x^2 - y^2$;

(f) $f(x, y) = x^2$.



16. ábra. $f(x,y) = x^2 - y^2$



17. ábra. $f(x,y) = x^2$

4. Parciális deriválás

1. Adjuk meg az alábbi függvények parciális deriváltfüggvényeit!

   (a) $f(x,y) = x$
   $\partial_x f(x,y) = 1, \quad \partial_y f(x,y) = 0$

   (b) $f(x,y) = x^2 y$
   $\partial_x f(x,y) = 2xy, \quad \partial_y f(x,y) = x^2$

   (c) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x + 1$
   $\partial_x f(x,y) = 2x - 2y - 1, \quad \partial_y f(x,y) = -2x + 2y$

   (d) $f(x,y) = (x^3 - 2x^2 y + y^2)^7$
   $\partial_x f(x,y) = 7(x^3 - 2x^2 y + y^2)^6 \cdot (3x^2 - 4xy), \quad \partial_y f(x,y) = 7(x^3 - 2x^2 y + y^2)^6 \cdot (-2x^2 + 2y)$

   (e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 y^2 - 1}$
   $\partial_x f(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 y^2 - 1}}, \quad \partial_y f(x,y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 y^2 - 1}}$

   (f) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$
   $\partial_x f(x,y) = 2x \cdot \cos(x^2 + y^2), \quad \partial_y f(x,y) = 2y \cdot \cos(x^2 + y^2)$

   (g) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-\sqrt{2x-y}}$
   $\partial_x f(x,y) = \mathrm{e}^{-\sqrt{2x-y}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2x-y}}\right), \quad \partial_y f(x,y) = \mathrm{e}^{-\sqrt{2x-y}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{2x-y}}$

(h) $f(x,y) = xy\cos x^2y^2$
$\partial_x f(x,y) = y\cos x^2y^2 - 2x^2y^3\sin x^2y^2, \quad \partial_y f(x,y) = x\cos x^2y^2 - 2x^3y^2\sin x^2y^2$

(i) $f(x,y) = xy\ln(x+y)$
$\partial_x f(x,y) = y\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}, \quad \partial_y f(x,y) = x\ln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$

(j) $f(x,y) = \frac{1}{x\sin\frac{1}{y}}$
$\partial_x f(x,y) = -\frac{1}{x^2\sin\frac{1}{y}}, \quad \partial_y f(x,y) = \frac{\frac{1}{y^2}\cos\frac{1}{y}}{x\sin^2\frac{1}{y}}$

(k) $f(x,y) = 2^{-\frac{x}{y}}$
$\partial_x f(x,y) = -\frac{\ln 2}{y}\cdot 2^{-\frac{x}{y}}, \quad \partial_y f(x,y) = \frac{x\ln 2}{y^2}\cdot 2^{-\frac{x}{y}}$

(l) $f(x,y) = \frac{x^2+3xy-1}{y^2+3xy-1}$
$\partial_x f(x,y) = \frac{3y^3+2xy^2+3x^2y-2x}{(y^2+3xy-1)^2}, \quad \partial_y f(x,y) = \frac{-3x^3-2x^2y-3xy^2+2y}{(y^2+3xy-1)^2}$

(m) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2y^2}$
$\partial_x f(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{xy^2}{\sqrt{1-x^2y^2}}, \quad \partial_y f(x,y) = -\frac{x^2y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$

(n) $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$
$\partial_x f(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \partial_y f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

(o) $f(x,y) = \frac{x\arcsin y}{y\arccos x}$
$\partial_x f(x,y) = \frac{\arcsin y}{y\cdot\arccos^2 x}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arccos x\right), \quad \partial_y f(x,y) = \frac{x\arccos x}{y^2\cdot\arccos^2 x}\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \arcsin y\right)$

(p) $f(x,y) = x^y$
$\partial_x f(x,y) = y\cdot x^{y-1}\ (y\neq 0), \quad \partial_y f(x,y) = \ln x\cdot x^y$

2. Adjuk meg az alábbi függvények első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeit!

(a) $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + xy^2 + y^3$
$\partial_x f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^2, \quad \partial_y f(x,y) = -3x^2 + 2xy + 3y^2$
$\partial_{xx} f(x,y) = 6x - 6y, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = -6x + 2y, \quad \partial_{yy} f(x,y) = 2x + 6y$

(b) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$
$\partial_x f(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2}, \quad \partial_y f(x,y) = -\frac{2x}{(x+y)^2}$
$\partial_{xx} f(x,y) = -\frac{4y}{(x+y)^3}, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = \frac{2x-2y}{(x+y)^3}, \quad \partial_{yy} f(x,y) = \frac{4x}{(x+y)^3}$

(c) $f(x,y) = \sin x\cos y$
$\partial_x f(x,y) = \cos x\cos y, \quad \partial_y f(x,y) = -\sin x\sin y$
$\partial_{xx} f(x,y) = \partial_{yy} f(x,y) = -\sin x\cos y, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = -\cos x\sin y$

(d) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
$\partial_x f(x,y) = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_y f(x,y) = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$
$\partial_{xx} f(x,y) = -\frac{2y^2-6x^2}{(x^2+y^2)^3}, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = \frac{8xy}{(x^2+y^2)^3}, \quad \partial_{yy} f(x,y) = -\frac{2x^2-6y^2}{(x^2+y^2)^3}$

(e) $f(x,y) = \ln\frac{x+y}{x-y}$
$\partial_x f(x,y) = \frac{-2y}{x^2-y^2}, \quad \partial_y f(x,y) = \frac{2x}{x^2-y^2}$
$\partial_{xx} f(x,y) = \partial_{yy} f(x,y) = \frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = -2\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}$

(f) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y}$
$\partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y) = -\mathrm{e}^{-x-y}$
$\partial_{xx} f(x,y) = \partial_{yy} f(x,y) = \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y}$

5. Kétváltozós szélsőértékszámítás

1. Állapítsuk meg a következő függvényekről, hogy van-e lokális szélsőértékük, és ha igen, hol, és ezek mekkorák!

   (a) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

   Megoldás: $f'(x,y) = (3(x^2-y), 3(y^2-x))$ és $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$. f' zérushelyei a $(0,0)$ és az $(1,1)$ pontok. A $(0,0)$ pontban $f''(0,0)$ indefinit ($\det f''(0,0) = -9 < 0$), így itt nyeregpontja van f-nek, az $(1,1)$ pontban pedig $f''(1,1)$ pozitív definit ($\det f''(1,1) = 27$ és a mátrix bal felső eleme pozitív), így itt lokális minimuma van f-nek, $f(1,1) = -1$.

   (b) $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$

   Megoldás: $f'(x,y) = (4x^3 - 4y, -4x + 4y^3)$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$. f' zérushelyei a $(0,0)$, $\pm(1,1)$ pontok. A $(0,0)$ pontban $f''(0,0)$ indefinit ($\det f''(0,0) = -16 < 0$), így itt f-nek nyeregpontja van. A $\pm(1,1)$ pontokban $f''(\pm1,\pm1)$ pozitív definit ($\det f''(\pm1,\pm1) > 0$ és a mátrix bal felső eleme pozitív), tehát ezekben a pontokban f-nek lokális minimuma van, $f(1,1) = -2$, $f(-1,-1) = -2$.

   (c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x+3y} \cdot (8x^2 - 6xy + 3y^2)$

   Megoldás: $f'(x,y) = (\mathrm{e}^{2x+3y} \cdot (16x^2 - 12xy + 6y^2 + 16x - 6y), \mathrm{e}^{2x+3y} \cdot (24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y))$. f' zérushelyei a $(0,0)$ és $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$. Mivel $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ pozitív definit ($\det f''(0,0) = 60 > 0$ és a mátrix bal felső eleme pozitív), ezért $(0,0)$ lokális minimumhely, $f(0,0) = 0$. $f''(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}) = \mathrm{e}^{-2} \begin{pmatrix} 14 & -9 \\ -9 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ indefinit ($\det f''(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}) = \mathrm{e}^{-2}(-60) < 0$), ezért $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ nyeregpont.

   (d) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;

   Megoldás: $f'(x,y) = (2x + y - \frac{4}{x}, x + 2y - \frac{10}{y})$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{10}{y^2} \end{pmatrix}$. f' zérushelyei az $(1,2)$ és $(-1,-2)$ pontok, de f értelmezési tartománya miatt csak az $(1,2)$ jöhet szóba. Mivel $f''(1,2)$ pozitív definit ($\det f''(1,2) = 26 > 0$ és a mátrix bal felső eleme 6 pozitív), ezért $(1,2)$ lokális minimumhely, $f(1,2) = 7 - 10\ln 2$.

   (e) $f(x,y) = (x^2 - 6x) \cdot (y^2 - 4y)$

   Megoldás: $f'(x,y) = ((2x-6)(y^2-4y), (x^2-6x)(2y-4))$, f' zérushelyei a $(0,0)$, $(0,4)$, $(6,0)$, $(6,4)$ és $(3,2)$ pontok. $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y^2-4y) & (2x-6)(2y-4) \\ (2x-6)(2y-4) & 2(x^2-6x) \end{pmatrix}$. Könnyen látható, hogy $\det f''(0,0) = \det f''(0,4) = \det f''(6,0) = \det f''(6,4) = -24^2 < 0$, ezért ezeken a helyeken nincs lokális szélsőértéke f-nek. Másrészt $f''(3,2)$ negatív definit ($\det f''(3,2) = 8 \cdot 18 > 0$ és a mátrix bal felső eleme -8 negatív), ezért $(3,2)$ lokális maximumhely, $f(3,2) = 36$.

   (f) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1$

   Megoldás: $f'(x,y) = (2x - 1, 4y - 2)$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. f' zérushelye az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pont. Mivel $f''(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pozitív definit ($\det f''(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 8 > 0$ és a mátrix bal felső eleme pozitív), ezért $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ lokális minimumhely, $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{7}{4}$.

   (g) $f(x,y) = (1-x)^2 + (2+y)^2 - 4$

   Megoldás: $f'(x,y) = (-2(1-x), 2(2+y))$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. f' zérushelye az $(1,-2)$ pont. Mivel $f''(1,-2)$ pozitív definit ($\det f''(1,-2) = 4 > 0$ és a mátrix bal felső eleme pozitív), ezért $(1,-2)$ lokális minimumhely, $f(1,-2) = -4$.

   (h) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 - 4$

   Megoldás: $f'(x,y) = (3x^2 - 6x + 2y, 2x + 2y)$, $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. f' zérushelyei a $(0,0)$, $(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ pontok. A $(0,0)$ pontban $f''(0,0)$ indefinit ($\det f''(0,0) = -16 < 0$), így itt f-nek nyeregpontja van. A $(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ pontban $f''(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ pozitív definit ($\det f''(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}) > 0$ és a mátrix bal felső eleme $10 > 0$), tehát ebben a pontban f-nek lokális minimuma van, $f(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}) = -\frac{364}{27}$.

(i) $f(x, y) = y^3 - x^2 - 4y^2 + 2xy$

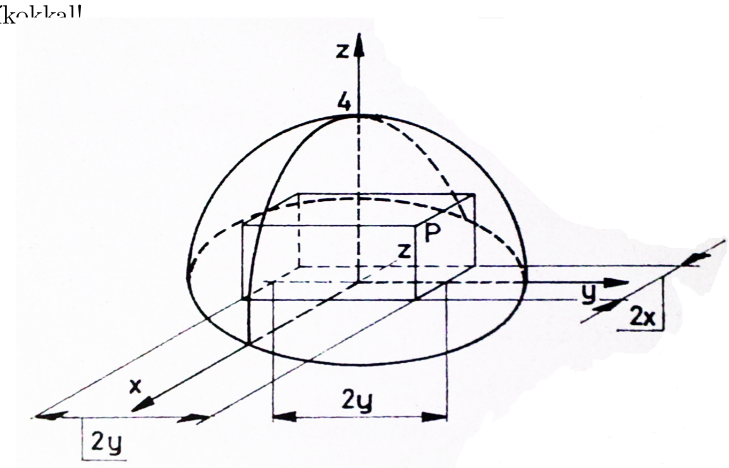
Megoldás: $f'(x, y) = (-2x + 2y, 3y^2 - 8y + 2x)$, $f''(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 6y-8 \end{pmatrix}$. f' zérushelyei a $(0, 0)$, $(2, 2)$ pontok. A $(0, 0)$ pontban $f''(0, 0)$ negatív definit ($\det f''(0, 0) = 12 > 0$ és a mátrix bal felső eleme negatív), így itt f-nek lokális maximumhelye van, $f(0, 0) = 0$. A $(2, 2)$ pontban $f''(2, 2)$ indefinit ($\det f''(2, 2) = -12 < 0$), tehát ebben a pontban f-nek nyeregpontja van.

(j) $f(x, y) = (3 - 2x + y) \cdot \mathrm{e}^{-y^2}$

Megoldás: $f'(x, y) = (\mathrm{e}^{-y^2}(-2), \mathrm{e}^{-y^2}(-6y + 4yx - 2y^2 + 1))$. Látható, hogy az első parciális derivált sehol sem 0, tehát a függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

2. Szöveges feladatok szélsőértékszámításra (tartomány alatt itt mindig zárt halmazt értünk).

(a) Határozzuk meg a $z = 4 - x^2 - 2y^2$ egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy-sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest oldalai párhuzamosak a koordinátasíkokkal!



18. ábra. 2.(a) feladat

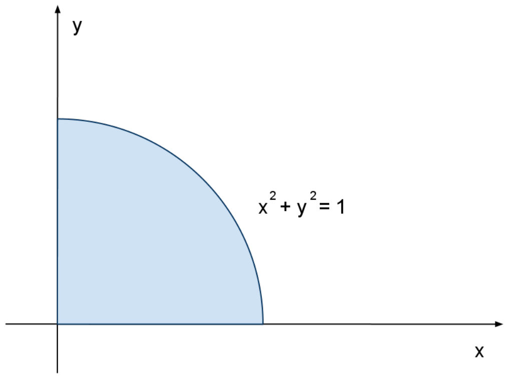
Megoldás: Ha a téglatest megadott felületen fekvő P csúcsának koordinátái $(x, y, 4 - x^2 - 2y^2)$ $(x, y > 0)$, akkor a téglatest oldalai $2x, 2y, 4 - x^2 - 2y^2$, így térfogata $f(x, y) = 4xy(4 - x^2 - 2y^2) = 16xy - 4x^3y - 8xy^3$. Ennek maximumát keressük a $T = \{(x, y) : x, y \geq 0,\ x^2 + 2y^2 \leq 4\}$ tartományon. Mivel az f függvény értéke a határokon mindenütt 0, belül pozitív, ezért a maximumhely csak lokális szélsőértékhely lehet. $f'(x, y) = (4y(4 - 3x^2 - 2y^2), 4x(4 - x^2 - 6y^2))$, aminek zérushelyei ($x, y \geq 0$ figyelembevételével) $(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ és $(0, 0)$ – de ez utóbbi nyilván nem maximumhely. Ezért $(1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ lokális maximumhely, tehát a keresett téglatest oldalai $2, \sqrt{2}, 2$.

(b) Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény minimumát és maximumát az x és y tengelyek, valamint az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű görbe által határolt tartomány 1. síknegyedbe eső részén!

Megoldás: $f'(x, y) = (2x, -2y)$. Mivel $f''(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indefinit minden (x, y)-ra, ezért f-nek nincs lokális szélsőértékhelye. Az f értékei a megadott tartomány határain a következők: az y tengelyen $-1 \leq f(0, y) \leq 0$, az x tengelyen $0 \leq f(x, 0) \leq 1$, a köríven pedig $-1 \leq f(x, y) = 2x^2 - 1 \leq 1$. Tehát f minimuma $f(0, 1) = -1$, maximuma $f(1, 0) = 1$.

(c) Határozzuk meg az $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ függvény maximumát, ha x, y, z egy háromszög szögei!

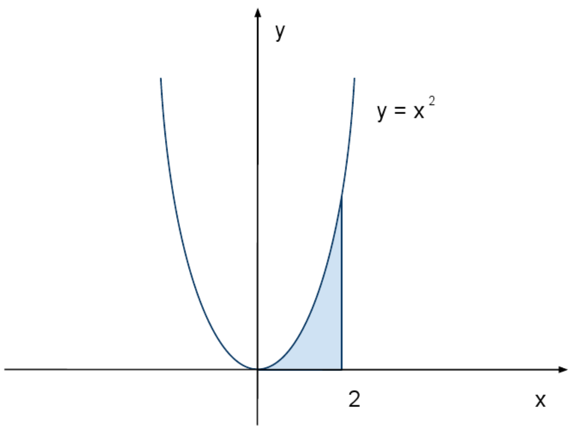
Megoldás: A feltétel szerint $z = \pi - x - y$, így $\sin z = \sin(\pi - x - y) = \sin(x + y)$. Tehát az $g(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$ függvény maximumát keressük a $T := \{(x, y) : x, y \geq 0,\ x + y \leq \pi\}$ tartományon. Mivel az g függvény értéke a határokon mindenütt 0, belül pedig felvesz pozitív értéket, ezért a maximumhely lokális szélsőértékhely lesz. $g'(x, y) = (\cos x \sin y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x + y), \sin x \cos y \sin(x + y) + \sin x \sin y \cos(x +$



19. ábra. 2.(b) feladat

$y)) = (\sin y \sin(2x+y), \sin x \sin(2y+x))$. Mivel maximumhelyet keresünk, ezért $\sin x \sin y \neq 0$, így az g' zérushelyeinek megtalálásához a $\sin(2x+y) = 0$ és $\sin(2y+x) = 0$ egyenleteket kell megoldanunk. Ezekből $2x + y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, de mivel háromszög szögeiről van szó, ezért csak $k = 1$ lehet, tehát $2x + y = \pi$. Hasonlóan, a másik egyenletből $x + 2y = \pi$. Így $x = y = \frac{\pi}{3}$, amiből a keresett függvénymaximum $g(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

(d) Határozzuk meg az $f(x, y) = y \cdot (2x - 3)$ függvény minimumát és maximumát az x-tengely, az $x = 2$ és az $y = x^2$ görbék által határolt tartományon!



20. ábra. 2.(d) feladat

Megoldás: $f'(x, y) = (2y, 2x - 3)$, így lokális szélsőértékhely csak a $(\frac{3}{2}, 0)$ pontban lehet, ami a tartomány határán van. Az f értékei a megadott tartomány határain a következők: az x tengelyen $f(x, 0) = 0$, az $x = 2$ egyenesen $0 \leq f(2, y) = y \leq 4$, a görbén pedig $f(x, x^2) = x^2(2x - 3)$, $x \in [0, 2]$. Ez utóbbi egyváltozós függvény lokális szélsőértékhelyei az $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ pontokban vannak, itt $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, itt $f(0, 0) = 0$, $f(1, 1) = -1$. Az f függvény tehát legkisebb értéke $f(1, 1) = -1$, legnagyobb értéke $f(2, 4) = 4$.

6. Ívhossz, vonalintegrál

1. Határozzuk meg a következő görbék ívhosszát!

(a) $g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (r \cos t, r \sin t)$ $(r > 0)$ (körvonal)

Megoldás: Mivel $g'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$, így

$$s(g) = \int_0^{2\pi} |g'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2}\, dt = r \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi r.$$

(b) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t)$ $(r > 0)$ (ciklois)

Megoldás: Mivel $g'(t) = (r - r\cos t, r\sin t)$, így

$$\begin{aligned} s(g) &= \int_0^{2\pi} |g'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2\sin^2 t}\,dt = \sqrt{2}r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}dt \\ &= \sqrt{2}r\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2r\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 2r\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4r(\cos 2\pi - \cos 0) = 8r. \end{aligned}$$

(c) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (r\cos^3 t, r\sin^3 t)$ $(r > 0)$ (asztroid)

Megoldás: Mivel $g'(t) = (-3r\cos^2 t\sin t, 3r\sin^2 t\cos t)$, így

$$\begin{aligned} s(g) &= \int_0^{2\pi} |g'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} |g'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{9r^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 3r|\cos t\sin t|\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{3r}{2}|\sin 2t|\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3r}{2}\sin 2t\,dt \\ &= 6r\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\frac{3r}{2} = 6r. \end{aligned}$$

(d) $g\colon [0,h] \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (t, r\cos t, r\sin t)$ $(h, r > 0)$ (csavarvonal)

Megoldás: Mivel $g'(t) = (1, -r\sin t, r\cos t)$, így $s(g) = \int_0^h |g'(t)|\,dt = \int_0^h \sqrt{1+r^2}dt = h\sqrt{1+r^2}$.

2. Legyen $f : [1,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$. Határozzuk meg f grafikonjának ívhosszát!

Megoldás: A grafikon legkézenfekvőbb paraméterezése $g\colon [1,4] \to \mathbb{R}^2$ $g(t) = (t, f(t))$. Emiatt $g'(t) = (1, f'(t))$, tehát

$$s(g) = \int_1^4 \sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt = \int_1^4 \sqrt{1 + \sqrt{t-1}^2}dt = \int_1^4 \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{14}{3}.$$

3. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált, ha $f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ és

(a) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$

Megoldás: Mivel $g'(t) = (-\sin t, \cos t)$ és $f(g(t)) = \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 + \sin^2 t}\right) = (-\sin t, \cos t)$, így

$$\int_g f = \int_0^{2\pi} \langle f(g(t)), g'(t)\rangle\,dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

(b) $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (-\cos t, \sin t)$

Megoldás: Mivel $g'(t) = (-\sin t, \cos t)$ és $f(g(t)) = \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 + \sin^2 t}, -\frac{\cos t}{\cos^2 + \sin^2 t}\right) = (-\sin t, -\cos t)$, így

$$\int_g f = \int_0^{2\pi} \langle f(g(t)), g'(t)\rangle\,dt = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)\,dt = -\int_0^{2\pi} 1\,dt = -2\pi.$$

4. Legyen g a felső félsíkba eső, origó középpontú egység sugarú félkörív pozitív irányítással, továbbá legyen $f(x,y) = (-y, x)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

Megoldás: A g görbe egy paraméterezése $g\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$. Ekkor $f(g(t)) = (-\sin t, \cos t)$ és $g'(t) = (-\sin t, \cos t)$, így

$$\int_g f = \int_0^{\pi} \langle f(g(t)), g'(t)\rangle\,dt = \int_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{\pi} 1\,dt = \pi.$$

5. Legyen g a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pontokat összekötő egységsugarú körív negatív irányítással, továbbá legyen $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{x}\right)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

Megoldás: A g görbe egy paraméterezése $g\colon \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, -\sin t)$.
Ekkor $f(g(t)) = (1, -\operatorname{tg} t)$ és $g'(t) = (-\sin t, -\cos t)$, így

$$\int_g f = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \langle f(g(t)), g'(t)\rangle\, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\sin t + (-\operatorname{tg} t)(-\cos t))\, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-\sin t + \sin t)\, dt = 0.$$

6. Legyen g a $(2,0)$, $(0,2)$ pontokat összekötő szakasz a $(0,2)$ pont felé irányítva, továbbá legyen $f(x,y) = (\cos y, \cos x)$. Számítsuk ki az $\int_g f$ vonalintegrált!

   Megoldás: A g görbe egy paraméterezése $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (2,0) + t(-2,2) = (2-2t, 2t)$.
   Ekkor $f(g(t)) = (\cos(2-2t), \cos 2t)$ és $g'(t) = (-2,2)$, így

$$\int_g f = \int_0^1 \langle f(g(t)), g'(t)\rangle\, dt = \int_0^1 (-2\cos(2-2t) + 2\cos 2t)\, dt = [\sin(2-2t) + \sin 2t]_0^1$$
$$= \sin 2 + \sin 0 - \sin 2 - \sin 0 = 0.$$

7. Kétdimenziós integrál

1. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények integrálját a T tartományon!

   (*a*) $f(x,y) := x + y, \quad T := [1,2] \times [3,4]$

   Megoldás:
   $\int_T f(x,y)\, dxdy = \int_1^2 \left(\int_3^4 (x+y)\, dy\right) dx = \int_1^2 \left[x \cdot y + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=3}^{y=4} dx = \int_1^2 \left(4x + 8 - 3x - \frac{9}{2}\right) dx = \int_1^2 (x + \frac{7}{2})\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{7}{2}x\right]_1^2 = 5.$

   (*b*) $f(x,y) := \exp(x+y), \quad T := [0,1] \times [0,1]$

   Megoldás:
   $\int_T f(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{x+y}\, dy\right) dx = \int_0^1 \left[\mathrm{e}^{x+y}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 (\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x)\, dx = \left[\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + 1 = (\mathrm{e}-1)^2.$

   (*c*) $f(x,y) := \frac{x^2}{1+y^2}, \quad T := [0,1] \times \left[0, \sqrt{3}\right]$

   Megoldás:
   $\int_T f(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+y^2}\, dy\right) dx = \int_0^1 \left[x^2 \cdot \operatorname{arctg} y\right]_{y=0}^{y=\sqrt{3}} dx = \int_0^1 \left(x^2 \cdot \frac{\pi}{3} - 0\right) dx = \frac{\pi}{3}\int_0^1 x^2\, dx = \frac{\pi}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{9}.$

   (*d*) $f(x,y) := x \cdot \cos(x+y), \quad T := \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

   Megoldás:
   $\int_T f(x,y)\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x+y)\, dy\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[x \cdot \sin(x+y)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \left(\sin(x + \frac{\pi}{2}) - \sin x\right) dx = \left[x \cdot \left(-\cos(x+\frac{\pi}{2}) + \cos x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos(x+\frac{\pi}{2}) + \cos x\right) dx = \frac{\pi}{2} - \left[-\sin(x+\frac{\pi}{2}) + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 2.$

   (*e*) $f(x,y) := xy \cdot \sin\left(x^2 + y^2\right), \quad T := \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \times \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$

   Megoldás:
   $\int_T f(x,y)\, dxdy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} xy \cdot \sin\left(x^2+y^2\right)\, dy\right) dx = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left[x \cdot \cos\left(x^2+y^2\right)\right]_{y=0}^{y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dx = -\frac{1}{4} \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2x \cdot \left(\cos\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) - \cos x^2\right) dx = -\frac{1}{4} \cdot \left[\sin\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) - \sin x^2\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}.$

   (*f*) $f(x,y) := x^2 \exp(xy), \quad T := [0,1] \times [0,2]$

   Megoldás:
   $\int_T f(x,y)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^2 \cdot \mathrm{e}^{xy}\, dy\right) dx = \int_0^1 \left[x \cdot \mathrm{e}^{xy}\right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 \left(x \cdot \mathrm{e}^{2x} - x\right) dx =$

$\left[\frac{1}{2}x\cdot \mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot\left(\mathrm{e}^2 - 1\right).$

(*g*) $f(x,y) := \frac{1}{(1+x+y)^2}, \quad T := [0,a]\times[0,a] \ (a\in\mathbb{R}^+)$

Megoldás:

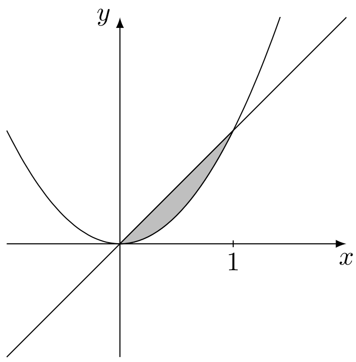
$\int_T f(x,y)\,dxdy = \int_0^a \left(\int_0^a \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dy\right) dx = -\int_0^a \left[\frac{1}{1+x+y}\right]_{y=0}^{y=a} dx = -\int_0^a \left(\frac{1}{1+x+a} - \frac{1}{1+x}\right) dx = -\left[\ln\frac{1+x+a}{1+x}\right]_0^a = -\ln\frac{1+2a}{1+a} + \ln(1+a) = \ln\frac{1+2a+a^2}{1+2a}.$

2. Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvények integrálját a T tartományon!

(*a*) $f(x,y) := x^2+y^2, \quad T := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1], x^2\le y\le x\right\}$

Megoldás:

$\int_T f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x^2+y^2)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[x^2\cdot y + \frac{1}{3}y^3\right]_{y=x^2}^{y=x} dx =$



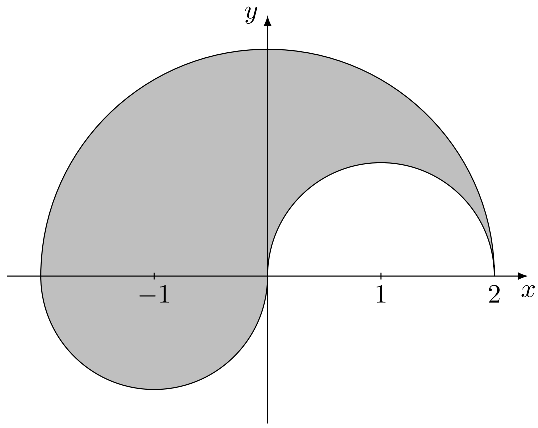
21. ábra. 2.(a) feladat

$\int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{1}{3}x^6\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{21}x^7\right]_0^1 = \frac{3}{35}.$

(*b*) $f(x,y) := y^3+2xy$, T a $K_1 := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4, y\ge 0\right\}$, a $K_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x+1)^2+y^2=1, y\le 0\}$, és a $K_3 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2=1, y\ge 0\}$ félkörök által határolt tartomány

Megoldás:

$\int_T f(x,y)\,dxdy = \int_{-2}^0 \left(\int_{-\sqrt{1-(x+1)^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (y^3+2xy)\,dy\right) dx + \int_0^2 \left(\int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (y^3+2xy)\,dy\right) dx = \int_{-2}^0 \left[\frac{1}{4}y^4 + xy^2\right]_{y=-\sqrt{1-(x+1)^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx + \int_0^2 \left[\frac{1}{4}y^4 + xy^2\right]_{y=\sqrt{1-(x-1)^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{4}(4-x^2)^2 + x\cdot(4-x^2) - \frac{1}{4}(1-(x+1)^2)^2 - x\cdot(1-(x+1)^2)\right) dx +$



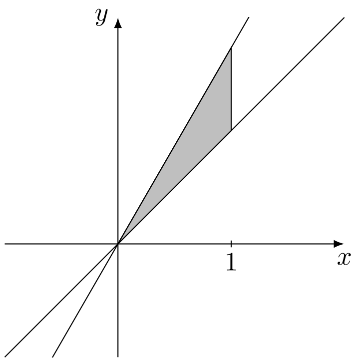
22. ábra. 2.(b) feladat

$\int_0^2 \left(\frac{1}{4}(4-x^2)^2 + x\cdot(4-x^2) - \frac{1}{4}(1-(x-1)^2)^2 - x\cdot(1-(x+1)^2)\right) dx = 8.$

(c) $f(x,y) := \frac{x+1}{y^2+1}, \quad T := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1], x\le y\le x\sqrt{3}\right\}$

Megoldás:

$\int_T f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{x\sqrt{3}} \frac{x+1}{y^2+1}\,dy\right) dx = \int_0^1 (x+1)\cdot\left(\operatorname{arctg}(x\sqrt{3}) - \operatorname{arctg} x\right) dx =$



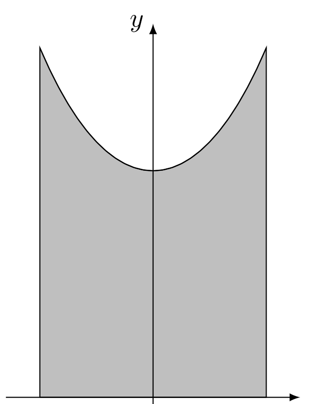
23. ábra. 2.(c) feladat

$\left[\frac{1}{2}(x+1)^2\cdot\left(\operatorname{arctg}(x\sqrt{3}) - \operatorname{arctg} x\right)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 (x+1)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{1+3x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\int_0^1\left(1+\frac{6x}{1+3x^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3}x)^2}\right) dx + \frac{1}{2}\cdot\int_0^1\left(1+\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\left[x+\ln(1+3x^2)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}x)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\cdot\left[x+\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\left(1+\ln 4+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}(1+\ln 2) = \frac{3-\sqrt{3}}{6} + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\cdot\ln 2 + \frac{\pi}{18}.$

(d) $f(x,y) := x^2 + xy, \quad T := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-r,r],\ 0\le y\le \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right\}$

Megoldás:

$\int_T f(x,y)\,dxdy = \int_{-r}^r \left(\int_0^{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} (x^2+xy)\,dy\right) dx = \int_{-r}^r \left[x^2y + \frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} dx = \int_{-r}^r x^2\cdot(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\,dx + \int_{-r}^r \frac{1}{2}x\cdot(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2)\,dx = 2\cdot\int_0^r (x^2\cdot(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}))\,dx = 2\cdot\left[x^2\cdot(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\right]_0^r - \int_0^r 2x\cdot(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\,dx = 2\cdot\left[x^2\cdot(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}) - 2x\cdot(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}) + 2\cdot(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\right]_0^r = 2\cdot\left(r^2\cdot(\mathrm{e}^r-\mathrm{e}^{-r}) - 2r\cdot(\mathrm{e}^r+\mathrm{e}^{-r}) + 2\cdot(\mathrm{e}^r-\mathrm{e}^{-r})\right).$



24. ábra. 2.(d) feladat