# Operátorfélcsoportok feladatok, 2018/19. őszi félév

Sikolya Eszter

2018. október 26.

Legyen $\Omega$ lokálisan kompakt tér esetén

$$C_0(\Omega) := \left\{ f \in C(\Omega) : \forall \varepsilon > 0\, \exists K_\varepsilon \subset \Omega \text{ kompakt halmaz, melyre } \sup_{\Omega \setminus K_\varepsilon} |f| < \varepsilon \right\}.$$

1. Legyen $q : \Omega \to \mathbb{C}$ folytonos. Definiálja az $M_q : C_0(\Omega) \to C_0(\Omega)$ ún. *szorzás operátort*

$$M_q f := q \cdot f$$
$$D(M_q) := \{ f \in C_0(\Omega) : q \cdot f \in C_0(\Omega) \}.$$

Igazoljuk az alábbiakat!

(a) $(M_q, D(M_q))$ zárt, sűrűn definiált;

(b) $M_q$ pontosan akkor korlátos (vagyis $D(M_q) = C_0(\Omega)$), ha $q$ korlátos. Ekkor

$$\|M_q\| = \|q\| = \sup_{s \in \Omega} |q(s)|;$$

(c) $M_q$-nak pontosan akkor létezik korlátos inverze, ha $q$-nak létezik inverze $1/q$, vagyis $0 \notin \overline{q(\Omega)}$. Ekkor

$$M_q^{-1} = M_{1/q}.$$

(d) $M_q$ spektruma $q$ képhalmazának lezártja, vagyis

$$\sigma(M_q) = \overline{q(\Omega)}.$$

2. Legyen $q : \Omega \to \mathbb{C}$ folytonos függvény, melyre

$$\sup_{s \in \Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty.$$

Ekkor definiálja a $(T_q(t))_{t \geq 0}$ ún. *szorzás-félcsoportot*

$$T_q(t) f := \mathrm{e}^{tq} f, \quad t \geq 0, \quad f \in C_0(\Omega).$$

Igazoljuk az alábbiakat!

(a) $(T_q(t))_{t\geq 0}$ pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha $q$ korlátos.

(b) Minden $f \in C_0(\Omega)$ esetén a

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T_q(t)f \in C_0(\Omega)$$

leképezés folytonos.

3. Legyen $t \geq 0$, $m_t : \Omega \to \mathbb{C}$ korlátos folytonos függvény, és tegyük fel, hogy

   (a) a megfelelő

   $$T(t)f := m_t \cdot f$$

   szorzás-operátorok (korlátos operátorokból álló) félcsoportot alkotnak a $C_0(\Omega)$ téren;

   (b) minden $f \in C_0(\Omega)$ esetén a

   $$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t)f \in C_0(\Omega)$$

   leképezés folytonos.

   Igazoljuk, hogy ekkor létezik olyan $q : \Omega \to \mathbb{C}$ folytonos függvény, amelyre $\sup_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty$, és

   $$m_t(s) = \mathrm{e}^{tq(s)},\ s \in \Omega,\ t \geq 0.$$

Legyen a következőkben $1 \leq p < \infty$, $X := L^p(\Omega, \mu)$, ahol $(\Omega, \mu)$ szigma-véges mértéktér. Lássuk el $X$-et a szokásos

$$\|f\|_p := \left( \int_\Omega |f(s)|^p d\mu(s) \right)^{1/p}$$

normával, ahol $f \in X$ a megfelelő ekvivalenciaosztály egy eleme.

Legyen $q : \Omega \to \mathbb{C}$ mérhető. Ekkor $q$ *lényeges képhalmaza*

$$q_{\text{ess}}(\Omega) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu\left(\{s \in \Omega : |q(s) - \lambda| < \varepsilon\}\right) \neq 0 \text{ minden } \varepsilon > 0\}.$$

4. Legyen $q : \Omega \to \mathbb{C}$ mérhető. Definiálja az $M_q : L^p(\Omega,\mu) \to L^p(\Omega,\mu)$ *szorzás operátort*

   $$M_q f := q \cdot f$$
   $$D(M_q) := \{f \in L^p(\Omega,\mu) : q \cdot f \in L^p(\Omega,\mu)\}.$$

   Igazoljuk az alábbiakat!

(a) $(M_q, D(M_q))$ zárt, sűrűn definiált;

(b) $M_q$ pontosan akkor korlátos (vagyis $D(M_q) = L^p(\Omega, \mu)$), ha $q$ lényegesen korlátos, vagyis $q_{\mathrm{ess}}(\Omega)$ korlátos. Ekkor

$$\|M_q\| = \|q\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in q_{\mathrm{ess}}(\Omega)\};$$

(c) $M_q$-nak pontosan akkor létezik korlátos inverze, ha $0 \notin q_{\mathrm{ess}}(\Omega)$. Ekkor

$$M_q^{-1} = M_r,$$

ahol $r : \Omega \to \mathbb{C}$,

$$r(s) := \begin{cases} 1/q(s), & q(s) \neq 0; \\ 0, & q(s) = 0. \end{cases}$$

(d) $M_q$ spektruma $q$ lényeges képhalmaza, vagyis

$$\sigma(M_q) = q_{\mathrm{ess}}(\Omega).$$

5. Legyen $q : \Omega \to \mathbb{C}$ mérhető függvény, melyre

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s \in \Omega} \operatorname{Re} q(s) := \sup_{\lambda \in q_{\mathrm{ess}}(\Omega)} \operatorname{Re} \lambda < \infty.$$

Ekkor definiálja a $(T_q(t))_{t \geq 0}$ *szorzás-félcsoportot*

$$T_q(t) f := \mathrm{e}^{tq} f, \quad t \geq 0, \quad f \in L^p(\Omega, \mu).$$

Igazoljuk az alábbiakat!

(a) $(T_q(t))_{t \geq 0}$ pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha $q$ lényegesen korlátos.

(b) Minden $f \in L^p(\Omega, \mu)$ esetén a

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T_q(t) f \in L^p(\Omega, \mu)$$

leképezés folytonos.

6. Legyen $t \geq 0$, $m_t : \Omega \to \mathbb{C}$ korlátos mérhető függvény, és tegyük fel, hogy

(a) a megfelelő

$$T(t) f := m_t \cdot f$$

szorzás-operátorok (korlátos operátorokból álló) félcsoportot alkotnak az $L^p(\Omega, \mu)$ téren;

(b) minden $f \in L^p(\Omega, \mu)$ esetén a

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t)f \in L^p(\Omega, \mu)$$

leképezés folytonos.

Igazoljuk, hogy ekkor létezik olyan $q : \Omega \to \mathbb{C}$ mérhető függvény, amelyre $\operatorname*{ess\,sup}_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty$, és

$$m_t(s) = \mathrm{e}^{tq(s)} \text{ majdnem minden } s \in \Omega\text{-ra}, \; t \geq 0.$$