Bevezetés az operátorfélcsoportok elméletébe

Sikolya Eszter
ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Tartalomjegyzék

Előszó

A félcsoport fogalma – mint algebrából ismeretes – egy olyan struktúrát takar, amelyen egy kétváltozós, asszociatív művelet van értelmezve. Az operátor a matematikában általában leképezést jelent. Jelen jegyzet a funkcionálanalízis egy, a 20. század második felében született, és azóta is folyamatoson fejlődő ágába, az operátorfélcsoportok világába nyújt betekintést. Az operátorfélcsoportok itt egy tetszőleges X Banach-téren értelmezett korlátos (lineáris) operátorok struktúráját jelentik, amelyekre teljesül a

$$T(t+s) = T(t)T(s), \quad T(0) = \mathrm{Id}$$

félcsoport-tulajdonság minden $t, s \geq 0$ esetén. Ha ezen tulajdonságot kibővítjük az erős (vagy pontonkénti) folytonossággal, vagyis megköveteljük, hogy a

$$t \mapsto T(t)x$$

ún. pályák folytonosak legyenek $\mathbb{R}^+$-on minden $x \in X$ esetén, akkor az erősen folytonos operátorfélcsoportokhoz jutunk, amelyek szép tulajdonságokkal rendelkeznek.

A jegyzet elsősorban az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán folyó Alkalmazott matematikus MSc-képzés, illetve a Matematika Doktori Iskola „Operátorfélcsoportok” című tantárgyához készült segédanyag. Ezen egy féléves kurzus anyagánál azonban jóval bővebb ismereteket tartalmaz, amelyek az erősen folytonos operátorfélcsoportok elméletébe való átfogóbb bevezetést szolgálják.

A jegyzet megértéséhez nélkülözhetetlen a funkcionálanalízis alapjainak ismerete. Ezek közül a legfontosabbak, címszavakban felsorolva: normált tér, duális tér, folytonos (korlátos) lineáris operátor és kompakt operátor fogalma, a fontosabb Banach-terek (L^p-terek, c_0-tér, stb.), Hilbert-terek, továbbá az alapvető tételek (Riesz-reprezentációs tétel, egyenletes korlátosság tétele, Banach–Steinhaus-tétel, stb.).

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet Csomós Petrának és Farkas Bálintnak a jegyzet megírásában, Besenyei Ádámnak pedig az ábrák elkészítésében nyújtott segítségéért.

1. fejezet

Lineáris dinamikai rendszerek

1.1. Cauchy-féle függvényegyenlet

A félév során tulajdonképpen az ún. Cauchy-féle függvényegyenlet megoldásával fogunk foglalkozni.

$$\text{(FE)} \qquad \begin{cases} T(t+s) & = T(t)T(s), \quad t,s \geq 0, \\ T(0) & = \mathrm{Id}\,. \end{cases}$$

Ezek az egyenletek és a bennük szereplő T operátorok *autonóm determinisztikus rendszerek* időbeli viselkedésének leírására szolgálnak. Ezen rendszereket, valamint a T operátorokat az alábbi módon definiálhatjuk.

(a) A megfigyelés tárgya egy időbeli mozgásban/változásban lévő rendszer.

(b) Az *időt* az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ additív (fél)csoportjával írjuk le.

(c) A megfigyelt *rendszert* egy előzetesen lerögzített Z *állapottér*rel írjuk le, amely a későbbiekben általában egy (X-szel jelölt) Banach-tér. A tér $z \in Z$ elemei az állapotok, amelyeknek az időbeli változására vagyunk kíváncsiak. Például, ha a megfigyelt rendszer egy bolygórendszer, akkor Z állhat a bolygók helyzeteiből és sebességvektoraiból (vagy perdületeiből ill. impulzusmomentumaiból). Ha pedig egy ökoszisztémát vizsgálunk, akkor az állapotok lehetnek az egyes fajokhoz tartozó egyedek számai.

(d) A rendszer *mozgását* az állapotok időbeli változása írja le, vagyis matematikailag egy $\mathbb{R} \ni t \mapsto z(t) \in Z$ függvény.

(e) Minden $t_0 \in \mathbb{R}$ időpillanathoz és minden $z_0 \in Z$ kezdeti állapothoz egyértelműen tartozik egy $z_{t_0,z_0} : \mathbb{R} \to Z$ mozgás, amelyre $z_{t_0,z_0}(t_0) = z_0$. Így tehát minden $t, s \in \mathbb{R}$ számpárhoz definiálhatunk egy $\Phi_{t,s} : Z \to Z$ leképezést, amelyre $\Phi_{t,s}(w) := z_{t,w}(s)$ a t időpillanatban a w-ből induló mozgás helyzete az s időpillanatban. Az eddigi feltételek szerint

$$\Phi_{t,s} \circ \Phi_{s,r} = \Phi_{t,r}$$

minden $t, s, r \in \mathbb{R}$ időpontra, és $\Phi_{t,t} = \mathrm{Id}_Z$. Az ilyen típusú rendszerek neve *determinisztikus rendszer.*

(f) A $z_1 = \Phi_{t,s}(z_0)$ t időpontbeli állapot csak a z_0 kezdeti állapottól és a $\tau = t - s$ különbségtől függ. Az ilyen rendszereket hívják *autonóm*nak. Ez azt jelenti, hogy

$$T(t) := \Phi_{r,r+t}$$

definícióval (ahol r tetszőleges) egy $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ ún. *egyparaméteres csoport*ot kapunk Z-n, amelyre az (e) pontban meggondoltak szerint

$$T(t + s) = T(t)T(s), \quad T(0) = \mathrm{Id},$$

minden $t, s \in \mathbb{R}$ esetén.

Cauchy 1821-ben vetette fel a kérdést: keressük (FE) összes $T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ folytonos megoldását. Könnyen látható, hogy

$$t \mapsto \mathrm{e}^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$$

megoldás. A sejtésünk az – amit az alábbiakban bizonyítani is fogunk –, hogy más folytonos megoldás nincs. Először a differenciálható megoldásokat vizsgáljuk.

1.1. Állítás. *Legyen* $T(t) := \mathrm{e}^{at}$, $a \in \mathbb{C}$, $t \geq 0$. *Ekkor* T *differenciálható, és kielégíti az alábbi kezdetiérték-problémát:*

$$\text{(DE)} \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t) & = aT(t), \quad t \geq 0, \\ T(0) & = 1. \end{cases}$$

Megfordítva, a fenti függvény az egyetlen differenciálható megoldása (DE)-nek, és $a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(0)$.

Bizonyítás. Az állítás első része az analízisben tanultakból adódik. Az egyértelműséget bizonyításához legyen $S(\cdot)$ egy másik differenciálható megoldás, $t > 0$ rögzített. Definiálja

$$Q(s) := T(s)S(t-s), \quad 0 \le s \le t.$$

Ekkor Q differenciálható, és

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Q(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}T(s)S(t-s) - T(s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}S(t-s) = aT(s)S(t-s) - T(s)aS(t-s) = 0,$$

ezért Q konstans $[0, t]$-n. Így

$$T(t) = Q(t) = Q(0) = S(t).$$

Mivel t tetszőleges volt, az egyértelműség bizonyítása kész. □

A következő állítás arról szól, hogy (FE) folytonos megoldásai differenciálhatók is.

1.2. Állítás. *Legyen $T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ folytonos megoldása (FE)-nek. Ekkor T differenciálható is, továbbá egyértelműen létezik $a \in \mathbb{C}$ szám, amelyre (DE) teljesül.*

Bizonyítás. Definiálja

$$V(t) := \int_0^t T(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \ge 0.$$

Ekkor V differenciálható, és $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t) = T(t)$. Mivel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(0) = T(0) = 1$, ezért $\exists t_0 > 0$: $V(t_0) \neq 0$. Így (FE) felhasználásával

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{V(t_0)}V(t_0)T(t) = \frac{1}{V(t_0)}\int_0^{t_0} T(s)T(t)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{V(t_0)}\int_t^{t+t_0} T(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{V(t_0)}\int_0^{t+t_0} T(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{V(t_0)}\int_0^{t} T(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{V(t_0)}\left(V(t+t_0) - V(t)\right), \quad t \ge 0. \end{aligned}$$

Így T differenciálható, továbbá (FE) teljesülése miatt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(T(t+h) - T(t)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(T(h) - 1\right)T(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(0)T(t).$$

Tehát (DE) teljesül a T függvényre $a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(0)$ választással. □

1.3. Következmény. *Az előbbi két állítás alapján, ha $T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ folytonos megoldása (FE)-nek, akkor $T(t) = \mathrm{e}^{at}$, $t \ge 0$, tehát T differenciálható is (sőt, végtelen sokszor differenciálható).*

Az (FE) egyenlet azt jelenti, hogy $T : (\mathbb{R}_+, +) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ homomorfizmus. Ez kiterjeszthető $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, sőt $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ homomorfizmussá is.

1.2. Véges dimenziós dinamikai rendszerek

Legyen $X := \mathbb{C}^n$ az állapottér, továbbá legyen $\mathscr{L}(X) \equiv \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ az $n \times n$ mátrixok tere, mely azonosítható a $\mathbb{C}^n$-en értelmezett (folytonos) lineáris leképezések terével (algebrájával). *Lineáris dinamikai rendszer*nek nevezzük az olyan $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mátrix értékű függvényt, amelyre teljesül a

$$\text{(FE)} \qquad \begin{cases} T(t+s) & = T(t)T(s), \quad t, s \geq 0, \\ T(0) & = \mathrm{Id} \end{cases}$$

függvényegyenlet. Az $x_0 \in X$ állapot időbeli változását a $\xi_{x_0} : \mathbb{R}_+ \to X$,

$$\xi_{x_0}(t) := T(t)x_0$$

függvény írja le. A $\{T(t)x_0 : t \geq 0\}$ halmazt szokás az x_0 állapot *pályájá*nak is nevezni.

Keressük (FE) összes megoldását.

1.4. Definíció. Tetszőleges $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén jelölje

$$\mathrm{e}^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

A fenti definíció értelmes, mert bármely mátrixnormát véve, a végtelen sor részletösszegei Cauchy-sorozatot alkotnak, tehát konvergálnak X-ben. Ugyanis, ha $m > n$ természetes számok, akkor minden $t \geq 0$ esetén

$$\text{(1.1)} \qquad \left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{|t|^k \|A\|^k}{k!},$$

ami 0-hoz tart, ha $n, m \to \infty$, hiszen az $\mathrm{e}^{|t|\|A\|}$ sorának szeleteiről van szó. Ugyanígy látható, hogy

$$\text{(1.2)} \qquad \|\mathrm{e}^{tA}\| \leq \mathrm{e}^{t\|A\|}, \quad t \geq 0.$$

1.5. Állítás. *Tetszőleges $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ esetén a*

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \mathrm{e}^{tA} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

függvény folytonos és kielégíti az alábbiakat

$$\text{(FE)} \qquad \begin{cases} \mathrm{e}^{(t+s)A} & = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA}, \quad t, s \geq 0, \\ \mathrm{e}^{0A} & = \mathrm{Id}\,. \end{cases}$$

Bizonyítás. Az (1.1) egyenlőtlenség miatt az e^{tA} mátrixot definiáló sor abszolút konvergens. Ezért

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^kA^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^{n-k}A^{n-k}}{(n-k)!}\frac{s^kA^k}{k!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t+s)^nA^n}{n!} = \mathrm{e}^{(t+s)A}.\end{aligned}$$

Tehát (FE) teljesül. A folytonosság igazolásához megmutatjuk, hogy minden $t \geq 0$ esetén

$$\|\mathrm{e}^{(t+h)A} - \mathrm{e}^{tA}\| \to 0, \quad h \to 0.$$

Felhasználva az előbbieket kapjuk, hogy

$$\mathrm{e}^{(t+h)A} - \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}\left(\mathrm{e}^{hA} - \mathrm{Id}\right).$$

Így elég bizonyítani, hogy $\lim_{h\to 0}\mathrm{e}^{hA} = \mathrm{Id}$. Felhasználva az (1.2) egyenlőtlenséget,

$$\|\mathrm{e}^{hA} - \mathrm{Id}\,\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^kA^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|h|^k\|A\|^k}{k!} = \mathrm{e}^{|h|\|A\|} - 1 \to 0, \quad h \to 0.$$

□

1.6. Definíció. Az $\left(\mathrm{e}^{tA}\right)_{t\geq 0}$ mátrixcsaládot az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mátrix által generált *egyparaméteres félcsoport*nak nevezzük.

1.7. *Megjegyzés.* Az 1.4. Definícióban $t \in \mathbb{R}$ (vagy $t \in \mathbb{C}$) is vehető. Ez esetben e^{tA} invertálható, $\left(\mathrm{e}^{tA}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ csoport, továbbá $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ homomorfizmus $(\mathbb{R},+)$-ból $GL(n,\mathbb{C})$-be (az invertálható, $n \times n$-es komplex mátrixok csoportjába).

1.8. Példa.

1. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$

diagonális mátrix. Ekkor

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{ta_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{ta_2} & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \mathrm{e}^{ta_n}\end{pmatrix}.$$

2. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{k \times k}$$

Jordan-blokk. Írjuk fel A-t $A = D+N$ összeg-alakban, ahol $D = \operatorname{diag}(\lambda)$ diagonális, N pedig nilpotens, azaz a k-adik hatványa 0. Így

$$\mathrm{e}^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{k \times k}.$$

Mivel D és N felcserélhetők, ezért

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tD}\mathrm{e}^{tN}.$$

1.9. Lemma. *Legyen $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tetszőleges, $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invertálható. Ekkor az $A := S^{-1}BS$ mátrix által generált (fél)csoport*

$$\mathrm{e}^{tA} = S^{-1}\mathrm{e}^{tB}S.$$

Bizonyítás. Közvetlen számolással adódik, hogy $A^k = S^{-1}B^kS$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel az S ill. S^{-1} operátorral való szorzás folytonos, ezért

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k S^{-1} B^k S}{k!} = S^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k B^k}{k!} \right) S = S^{-1}\mathrm{e}^{tB}S.$$

□

1.10. Következmény. *Legyen $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tetszőleges mátrix. Lineáris algebrából ismert, hogy létezik olyan $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invertálható mátrix, melyre $B = S^{-1}AS$ Jordan-normál alakú, vagyis az 1.8. Példában szereplő típusú mátrixok direkt összege. Az 1.9. Lemma alapján*

$$\mathrm{e}^{tA} = S\mathrm{e}^{tB}S^{-1},$$

ahol e^{tB} az 1.8. Példában számított exponenciálisok direkt összegéből áll.

Az alábbiakban ismét a differenciálhatóság segítségével igazoljuk a (FE) megoldásának egyértelműségét $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$-ben.

1.11. Állítás. *Legyen $T(t) := \mathrm{e}^{tA}$ valamely $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ esetén. Ekkor a $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ függvény differenciálható, és kielégíti az alábbi kezdetiérték-problémát:*

$$\text{(DE)} \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t) &= AT(t), \quad t \geq 0, \\ T(0) &= \mathrm{Id}\,. \end{cases}$$

Megfordítva, a fenti T függvény az egyetlen differenciálható megoldása (DE)-nek, és $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(0)$.

Bizonyítás. A t pontbeli differenciálhatóság bizonyításához gondoljuk meg, hogy (FE) alapján minden $h > 0$ esetén

$$\frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \frac{T(h) - \mathrm{Id}}{h} T(t).$$

Ezért elég belátni a 0-beli differenciálhatóságot, és hogy $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(0)$, amivel így (DE) teljesülését is igazoltuk. A $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$ függvény definíciója miatt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(h) - \mathrm{Id}}{h} - A \right\| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-1}\|A\|^k}{k!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{|h|\|A\|} - 1}{|h|} - \|A\| \to 0, \quad h \to 0. \end{aligned}$$

A bizonyítás hátralévő része az 1.1. Állítás bizonyításának analógjára történik. □

1.12. Állítás. *Legyen $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ folytonos megoldása (FE)-nek. Ekkor létezik egyértelműen $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mátrix, amelyre*

$$T(t) = \mathrm{e}^{tA}, \quad t \geq 0.$$

Bizonyítás. Definiálja

$$V(t) := \int_0^t T(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

Ekkor V differenciálható, és $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t) = T(t)$. Mivel $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}V(t) = \mathrm{Id}$, és az invertálható mátrixok nyílt halmazt alkotnak $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$-ben, ezért $\exists t_0 > 0$: $V(t_0)$ invertálható. Ekkor minden t-re

$$T(t) = V(t_0)^{-1}V(t_0)T(t).$$

Ezután ismételjük meg az 1.2. Állítás bizonyítását! □

Az előbbi bizonyítás az (1.3) alakú integrálon alapult. Felmerül a kérdés, hogy hogyan értelmezhetjük mátrix – vagy még általánosabban: Banach-tér-értékű függvények – ilyen típusú integráljait. Ezért most a teljesség igénye nélkül kis kitérőt teszünk az ún. **Bochner-integrál** bevezetésére, ami nem más, mint a Lebesgue-integrál általánosítása Banach-tér-értékű függvényekre.
Legyen X Banach-tér, $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to X$.

1.13. Definíció.

1. Azt mondjuk, hogy f *egyszerű függvény*, ha
$$f = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{J_k}$$
alakú, ahol $J_k \subset I$ (Lebesgue-)mérhető, $x_k \in X$, $k = 1, \ldots, n$. Ekkor f *(Bochner-)integrálja*
$$\int_I f(s)\,\mathrm{d}s := \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \lambda(J_k) \in X.$$

2. Azt mondjuk, hogy f *(erősen) mérhető*, ha létezik (f_n) egyszerű függvényekből álló sorozat, melyre
$$\lim_{n\to\infty} \|f(s) - f_n(s)\| = 0 \qquad \text{m.m. } s \in I.$$

3. Ha f mérhető és létezik (f_n) egyszerű függvényekből álló sorozat, melyre
$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f(s) - f_n(s)\|\,\mathrm{d}s = 0,$$
akkor f *(Bochner-)integrálható*,
$$\int_I f(s)\,\mathrm{d}s := \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(s)\,\mathrm{d}s.$$
Igazolható, hogy a definícióban szereplő integrálsorozat valóban konvergens X-ben, és a limesz független az (f_n) egyszerű függvények választásától.

1.14. *Megjegyzés.* Ha I kompakt, $f : I \to X$ folytonos, akkor a fent definiált integrálja megegyezik a Riemann-összegek által definiált Riemann-integrállal. Ha pedig I tetszőleges, $f : I \to X$ folytonos akkor megegyezik a Riemann-improprius integráljával, feltéve, hogy valamelyik (a Riemann-improprius vagy a Bochner-) integrál abszolút konvergens.

A következőkben bizonyítás nélkül kimondunk a Bochner-integrál tulajdonságairól szóló néhány fontos állítást.

1.15. Állítás.

(a) *Legyen* (f_n) *mérhető függvényekből álló sorozat, melyre*

$$\lim_{n\to\infty} \|f(s) - f_n(s)\| = 0 \qquad m.m.\ s \in I.$$

Ekkor f *is mérhető.*

(b) *Legyen* f *mérhető,* $F : I \to \mathscr{L}(X)$ *erősen folytonos (vagyis, minden* $x \in X$ *esetén* $I \ni s \mapsto F(s)x \in X$ *folytonos). Ekkor* $F \circ f$ *is mérhető, ahol*

$$(F \circ f)(s) = F(s)f(s).$$

1.16. Állítás. *Legyen* $f : I \to X$ *mérhető. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) f *integrálható;*

(ii) $\int_I \|f(s)\|\,\mathrm{d}s < \infty$.

1.17. Következmény. *Legyen* $f : I \to X$ *mérhető. Ekkor*

(a)

$$\left\| \int_I f(s)\,\mathrm{d}s \right\| \le \int_I \|f(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

(b) *Lebesgue dominált konvergenciatétel teljesül, vagyis ha* (f_n) *mérhető függvényekből álló sorozat,* $f_n \to f$ *majdnem mindenütt, továbbá létezik olyan* g *valós függvény, amelyre*

$$\|f_n\| \le g,\ n \in \mathbb{N}, \qquad \int_I g(s)\,\mathrm{d}s < \infty \quad (azaz\ g \in L^1(I)),$$

akkor

$$\int_I f_n(s)\,\mathrm{d}s \to \int_I f(s)\,\mathrm{d}s.$$

A továbbiakban az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mátrix által generált $(\mathrm{e}^{tA})_{t\ge 0}$ félcsoport aszimptotikus tulajdonságaival foglalkozunk.

1.18. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ félcsoport *stabil*[1], ha

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathrm{e}^{tA}\| = 0, \tag{1.4}$$

ahol $\|\cdot\|$ tetszőleges mátrixnorma az $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ téren.

1.19. *Megjegyzés.* Mivel az $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ téren a pontonkénti és a normakonvergencia megegyezik, ezért az (1.4) feltétel ekvivalens azzal, hogy minden $x \in \mathbb{C}^n$ esetén

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathrm{e}^{tA}x\| = 0.$$

A következő tétel az A mátrix $\sigma(A)$-val jelölt sajátértékhalmazának tulajdonságai és a stabilitás közötti kapcsolatról szól.

1.20. Tétel (Ljapunov, 1892)**.** *Legyen* $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ *az* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *mátrix által generált félcsoport. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) A félcsoport (aszimptotikusan) stabil, azaz $\lim_{t\to\infty} \|\mathrm{e}^{tA}\| = 0$*;*

(ii) Az A mátrix minden sajátértéke negatív valós részű, azaz $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ *minden* $\lambda \in \sigma(A)$ *esetén.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a stabilitás invariáns a hasonlóságra, így feltehető, hogy A Jordan normálalakú. Ekkor szintén könnyen igazolható, hogy $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ pontosan akkor stabil, ha minden egyes A_k Jordan-blokk által generált $(\mathrm{e}^{tA_k})_{t\geq 0}$ félcsoport stabil. Az 1.8 Példában kiszámoltak alapján ez akkor teljesül, ha $\mathrm{e}^{t\lambda_k} \to 0$, $t \to \infty$. Ez pedig akkor igaz, ha $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$ minden k-ra. Mivel λ_k-k éppen A sajátértékei, a bizonyítás kész. □

Később általánosítani fogjuk a fenti állítást végtelen dimenziós esetre is. Hasonlóan bizonyítható az alábbi következmény.

1.21. Következmény. *Legyen* $(\mathrm{e}^{tA})_{t\geq 0}$ *az* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *mátrix által generált félcsoport. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) A félcsoport korlátos, azaz létezik $M \geq 0$*, hogy* $\|\mathrm{e}^{tA}\| \leq M$ *minden* $t \geq 0$ *esetén;*

(ii) Az A mátrix minden sajátértékére $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ *teljesül, és ha* $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$*, akkor* λ *egyszeres sajátérték (vagyis a hozzá tartozó összes Jordan-blokk* 1×1 *méretű).*

[1] Precízen azt kellene mondanunk, hogy *aszimptotikusan stabil.*

1.3. Egyenletesen folytonos operátorfélcsoportok

Legyen X tetszőleges Banach-tér, jelölje $\mathscr{L}(X)$ a rajta értelmezett folytonos (korlátos) lineáris operátorok Banach terét a megfelelő operátornormával. Keressük az összes olyan $T : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{L}(X)$ függvényt, mely teljesíti az alábbi egyenleteket:

$$\text{(FE)} \qquad \begin{cases} T(t+s) &= T(t)T(s), \quad t,s \geq 0, \\ T(0) &= \mathrm{Id}\,. \end{cases}$$

1.22. Definíció. A korlátos lineáris operátorokból álló $(T(t))_{t\geq 0}$ családot *(egyparaméteres) operátorfélcsoport*nak (vagy lineáris dinamikai rendszernek) nevezzük az X Banach-téren, ha (FE) teljesül rá. Ha (FE) minden $t, s \in \mathbb{R}$ esetén is teljesül, akkor a $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ családot *(egyparaméteres) operátorcsoport*nak nevezzük.

1.23. Definíció. Tetszőleges $A \in \mathscr{L}(X)$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén jelölje

$$\text{(1.5)} \qquad \mathrm{e}^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

A fenti definíció értelmes, mert a végtelen sor részletösszegei Cauchy-sorozatot alkotnak, tehát konvergálnak $\mathscr{L}(X)$-ben (v.ö. az 1.4. Definícióval).

A következő két állítás a mátrixokra bizonyított 1.5. és 1.11. Állításokkal analóg módon igazolható.

1.24. Állítás. *Tetszőleges $A \in \mathscr{L}(X)$ esetén a*

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \mathrm{e}^{tA} \in \mathscr{L}(X)$$

függvény folytonos és kielégíti az alábbiakat

$$\text{(FE)} \qquad \begin{cases} \mathrm{e}^{(t+s)A} &= \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA}, \quad t,s \geq 0, \\ \mathrm{e}^{0A} &= \mathrm{Id}\,. \end{cases}$$

1.25. Állítás. *Legyen $T(t) := \mathrm{e}^{tA}$ valamely $A \in \mathscr{L}(X)$ esetén. Ekkor a $T : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{L}(X)$ függvény differenciálható, és kielégíti az alábbi kezdetiérték-problémát:*

$$\text{(DE)} \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t) &= AT(t), \quad t \geq 0, \\ T(0) &= \mathrm{Id}\,. \end{cases}$$

Megfordítva, a fenti függvény az egyetlen differenciálható megoldása (DE)-nek, és $A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(0)$.

1.26. Definíció. A $(T(t))_{t\geq 0}$ egyparaméteres operátorfélcsoportot *egyenletesen folytonos*nak mondunk, ha

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t) \in \mathscr{L}(X)$$

folytonos ($\mathscr{L}(X)$-ben az operátornormát véve).

A következő tétel ugyanúgy bizonyítható, mint az 1.12. Állítás, kihasználva, hogy az invertálható operátorok $\mathscr{L}(X)$-ben is nyílt halmazt alkotnak.

1.27. Tétel. *Az X Banach-téren egyenletesen folytonos $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport*

$$T(t) = \mathrm{e}^{tA}$$

alakú valamely $A \in \mathscr{L}(X)$ operátorra.

Az X Banach-téren értelmezett operátorfélcsoportokkal kapcsolatosan most vezessünk be egy, a mátrixokénál látszólag erősebb stabilitásfogalmat.

1.28. Definíció. A $(T(t))_{t\geq 0}$ operátorfélcsoportot *egyenletesen exponenciálisan stabil*nak mondunk, ha léteznek olyan $M \geq 1$, $\varepsilon > 0$ számok, melyekre

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0.$$

Az alábbi állításból kiderül, hogy az exponenciális stabilitás fogalma egyenletesen folytonos operátorfélcsoport esetén megegyezik azzal, amit stabilitásként definiálnánk.

1.29. Állítás. *A $(T(t))_{t\geq 0}$ egyenletesen folytonos operátorfélcsoport esetén a következő állítások ekvivalensek.*

(i) $(T(t))_{t\geq 0}$ *egyenletesen exponenciálisan stabil;*

(ii) $\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0$;

(iii) $\exists t_0 > 0 : \|T(t_0)\| < 1$;

(iv) $\exists t_1 > 0 : r(T(t_1)) < 1$, *ahol $r(T(t))$ jelöli $T(t)$ spektrálsugarát.*

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ triviális. $(iii) \Rightarrow (iv)$ következik abból, hogy

$$r(T(t)) \leq \|T(t)\|.$$

Másrészt, $(iv) \Rightarrow (iii)$ következik abból, hogy

$$r(T(t_1)) = \lim_{k\to\infty} \|T(t_1)^k\|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \|T(kt_1)\|^{\frac{1}{k}}.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: Legyen $\|T(t_0)\| < q < 1$ rögzített pozitív szám, és

$$M := \sup_{s\in[0,t_0]} \|T(s)\|,$$

ami véges, hiszen $t \mapsto \|T(t)\|$ folytonos. Tetszőleges t-t írjunk fel $t = k \cdot t_0 + s$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in [0, t_0)$ alakban! Ekkor

$$\|T(t)\| \le \|T(s)\| \cdot \|T(kt_0)\| \le M\|T(t_0)^k\| \le Mq^k = \frac{M}{q}\mathrm{e}^{(k+1)\ln q} \le \frac{M}{q}\mathrm{e}^{-\varepsilon t},$$

ahol $\varepsilon = -\frac{\ln q}{t_0} > 0$. $\square$

A következő tétel az $(\mathrm{e}^{tA})_{t\ge0}$ félcsoport és az $A \in \mathscr{L}(X)$ operátor spektruma, azaz sajátértékeinek halmaza közötti kapcsolatról szól. Egy $B \in \mathscr{L}(X)$ operátor spektrumát $\sigma(B)$-vel jelöljük.

1.30. Tétel (Spektrálleképezés). *Legyen $(\mathrm{e}^{tA})_{t\ge0}$ egyenletesen folytonos operátorfélcsoport. Ekkor*

$$\sigma(\mathrm{e}^{tA}) = \mathrm{e}^{t\sigma(A)} = \{\mathrm{e}^{t\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$$

minden $t \ge 0$ esetén.

Bizonyítás. A bizonyítás az alábbi ötleten alapul, nem részletezzük. Ha $t = 0$, akkor az állítás triviális. Legyen tehát $t > 0$. Ekkor

$$\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{e}^{t\lambda}\,\mathrm{Id} = \mathrm{e}^{t\lambda}(\mathrm{e}^{t(A-\mathrm{Id})} - \mathrm{Id}) = \mathrm{e}^{t\lambda}(A - \lambda)\int_0^t \mathrm{e}^{s(A-\lambda)}\,\mathrm{d}s.$$

Mivel $\int_0^t \mathrm{e}^{s(A-\lambda)}\,\mathrm{d}s$ invertálható, ezért az egyenlőségből következik, hogy

$$\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{e}^{t\lambda}\,\mathrm{Id} \text{ invertálható} \iff A - \lambda \text{ invertálható.}$$

$\square$

1.31. Következmény. *Az 1.29. Állítás $(i) - (iv)$ pontjai ekvivalensek azzal, hogy*
(v) $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ minden $\lambda \in \sigma(A)$ esetén.

1.4. Példák operátorfélcsoportokra

1.4.1. Szorzásfélcsoport a $C_0(\Omega)$ téren

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ esetén

$$C_0(\Omega) := \{f \in C(\Omega) : \forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \{s : |f(s)| \geq \varepsilon\} \text{ kompakt}\}.$$

1.32. Definíció. Legyen $q : \Omega \to \mathbb{C}$ folytonos. Definiálja az $M_q : C_0(\Omega) \to C_0(\Omega)$ ún. *szorzásoperátort*

$$\begin{aligned} M_q f &:= q \cdot f \\ D(M_q) &:= \{f \in C_0(\Omega) : \; q \cdot f \in C_0(\Omega)\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Az alpont hátralévő állításainak bizonyítását a fejezet végén feladatként tűzzük ki.

1.33. Állítás. *Az (1.6) egyenletben definiált M_q operátorra az alábbiak teljesülnek.*

(a) $(M_q, D(M_q))$ zárt, sűrűn definiált.

(b) M_q pontosan akkor korlátos (vagyis $D(M_q) = C_0(\Omega)$), ha q korlátos. Ekkor

$$\|M_q\| = \|q\| = \sup_{s\in\Omega} |q(s)|.$$

(c) M_q-nak pontosan akkor létezik korlátos inverze, ha q-nak létezik inverze $1/q$, vagyis $0 \notin \overline{q(\Omega)}$. Ekkor

$$M_q^{-1} = M_{1/q}.$$

(d) M_q spektruma q képhalmazának lezártja, vagyis

$$\sigma(M_q) = \overline{q(\Omega)}.$$

1.34. Definíció. Legyen $q : \Omega \to \mathbb{C}$ folytonos függvény, melyre

$$\sup_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty.$$

Ekkor definiálja a $(T_q(t))_{t\geq 0}$ ún. *szorzásfélcsoportot*

$$T_q(t) f := \mathrm{e}^{tq} f, \quad t \geq 0, \quad f \in C_0(\Omega). \tag{1.7}$$

1.35. Állítás. *Az (1.7) félcsoportra az alábbiak teljesülnek.*

(a) $(T_q(t))_{t\geq 0}$ *pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha* q *korlátos.*

(b) Minden $f \in C_0(\Omega)$ *esetén a*

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T_q(t)f \in C_0(\Omega)$$

leképezés folytonos.

1.36. Állítás. *Legyen minden* $t \geq 0$ *esetén* $m_t : \Omega \to \mathbb{C}$ *korlátos folytonos függvény, és tegyük fel, hogy*

1. *a megfelelő*

$$T(t)f := m_t \cdot f$$

szorzásoperátorok (korlátos operátorokból álló) félcsoportot alkotnak a $C_0(\Omega)$ *téren,*

2. *minden* $f \in C_0(\Omega)$ *esetén a*

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t)f \in C_0(\Omega)$$

leképezés folytonos.

Ekkor létezik olyan $q : \Omega \to \mathbb{C}$ *folytonos függvény, amelyre* $\sup_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty$, *és*

$$m_t(s) = \mathrm{e}^{tq(s)}, \ s \in \Omega, \ t \geq 0.$$

1.4.2. Szorzásfélcsoport az $L^p(\Omega)$ téren

Legyen a következőkben $1 \leq p < \infty$, $X := L^p(\Omega)$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mérhető. Lássuk el X-et a szokásos

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(s)|^p d\mu(s)\right)^{1/p}$$

normával, ahol $f \in X$ a megfelelő ekvivalenciaosztály egy eleme, μ pedig az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett Lebesgue-mértéket jelöli.

Legyen $q : \Omega \to \mathbb{C}$ mérhető. Ekkor q *lényeges képhalmaza*

$$q_{\text{ess}}(\Omega) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu\left(\{s \in \Omega : |q(s) - \lambda| < \varepsilon\}\right) \neq 0 \text{ minden } \varepsilon > 0 \text{ esetén}\}.$$

1.37. Definíció. Legyen $q : \Omega \to \mathbb{C}$ mérhető. Definiáljuk az $M_q : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ *szorzásoperátort* a következőkkel:

$$
\begin{aligned}
M_q f &:= q \cdot f \\
D(M_q) &:= \{ f \in L^p(\Omega) : q \cdot f \in L^p(\Omega) \} .
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Az alpont hátralévő állításainak bizonyítását a fejezet végén feladatként tűzzük ki.

1.38. Állítás. *Az (1.8) egyenlőséggel definiált M_q operátorra az alábbiak teljesülnek.*

(a) $(M_q, D(M_q))$ zárt, sűrűn definiált.

(b) M_q pontosan akkor korlátos (vagyis $D(M_q) = L^p(\Omega)$), ha q lényegesen korlátos, vagyis $q_{\mathrm{ess}}(\Omega)$ korlátos. Ekkor

$$\|M_q\| = \|q\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in q_{\mathrm{ess}}(\Omega)\}.$$

(c) M_q-nak pontosan akkor létezik korlátos inverze, ha $0 \notin q_{\mathrm{ess}}(\Omega)$. Ekkor

$$M_q^{-1} = M_r,$$

ahol $r : \Omega \to \mathbb{C}$,

$$r(s) := \begin{cases} 1/q(s), & q(s) \neq 0; \\ 0, & q(s) = 0. \end{cases}$$

(d) M_q spektruma q lényeges képhalmaza, vagyis

$$\sigma(M_q) = q_{\mathrm{ess}}(\Omega).$$

Jelölje a továbbiakban

$$\operatorname{ess\,sup} q := \sup_{\lambda \in q_{\mathrm{ess}}(\Omega)} \lambda.$$

1.39. Definíció. Legyen $q : \Omega \to \mathbb{C}$ mérhető függvény, amelyre

$$\operatorname{ess\,sup} \operatorname{Re} q = \sup_{\lambda \in q_{\mathrm{ess}}(\Omega)} \operatorname{Re} \lambda < \infty.$$

Ekkor definiálja a $(T_q(t))_{t \geq 0}$ *szorzásfélcsoportot*

$$T_q(t) f := \mathrm{e}^{tq} f, \quad t \geq 0, \quad f \in L^p(\Omega). \tag{1.9}$$

1.40. Állítás. *Az (1.9) félcsoportra az alábbiak teljesülnek.*

(a) $(T_q(t))_{t\geq 0}$ *pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha* q *lényegesen korlátos.*

(b) Minden $f \in L^p(\Omega)$ *esetén a*

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T_q(t)f \in L^p(\Omega)$$

leképezés folytonos.

1.41. Állítás. *Legyen minden* $t \geq 0$ *esetén* $m_t : \Omega \to \mathbb{C}$ *korlátos mérhető függvény, és tegyük fel, hogy*

1. *a megfelelő*

$$T(t)f := m_t \cdot f$$

szorzásoperátorok (korlátos operátorokból álló) félcsoportot alkotnak az $L^p(\Omega)$ *téren,*

2. *minden* $f \in L^p(\Omega)$ *esetén a*

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto T(t)f \in L^p(\Omega)$$

leképezés folytonos.

Ekkor létezik olyan $q : \Omega \to \mathbb{C}$ *mérhető függvény, amelyre* $\operatorname{ess\,sup} \operatorname{Re} q < \infty$, *és*

$$m_t(s) = \mathrm{e}^{tq(s)} \text{ majdnem minden } s \in \Omega \text{ és } t \geq 0 \text{ esetén.}$$

1.4.3. Eltolás-félcsoportok

1.42. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \geq 0$. Ekkor

$$(T_\ell(t)f)(s) := f(s+t), \quad s \in \mathbb{R}; \tag{1.10}$$

$$(T_r(t)f)(s) := f(s-t), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Könnyen meggondolható, hogy a $(T_\ell(t))_{t\geq 0}$ és $(T_r(t))_{t\geq 0}$ operátorcsaládok kielégítik (FE)-t.

1.43. *Jelölés.* Jelölje a továbbiakban $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum esetén (a példáinkban $I = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ vagy $[a, b]$)

- $L^\infty(I)$ az I-n m.m. értelmezett értelmezett korlátos, mérhető függvények (ill. azok ekvivalenciaosztályainak) terét;
- $C_{\mathrm{b}}(I)$ az I-n korlátos, folytonos függvények terét;
- $C_{\mathrm{ub}}(I)$ az I-n korlátos, egyenletesen folytonos függvények terét;
- $C_0(I)$ az I-n folytonos, végtelenben eltűnő függvények terét;
- $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$-en folytonos, 2π-nként periodikus függvények terét, ellátva a $\|\cdot\|_\infty$ supremum-normával,

továbbá $1 \le p < \infty$ esetén

- $L^p(I)$ az I-n m.m. értelmezett olyan függvényeket (illetve azok ekvivalencia-osztályait), melyek p-edik abszolút hatványának integrálja véges, ellátva a szokásos p-normával.

1.44. Állítás. *Legyen $I := \mathbb{R}$. Ekkor $T_\ell(t)$ operátorok izometriák a fenti terek mindegyikén, inverzük $T_r(t)$. Így a $(T_\ell(t))_{t\in\mathbb{R}}$ (vagy $(T_r(t))_{t\in\mathbb{R}}$) operátorcsalád egyparaméteres ún.* eltoláscsoportot *alkot a fenti terek mindegyikén.*

1.45. Állítás. *Legyen $I = \mathbb{R}$. Ekkor a $(T_\ell(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eltoláscsoport nem egyenletesen folytonos egyetlen fenti téren sem. Továbbá*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto T_\ell(t)f \in L^\infty(\mathbb{R})$$

csak akkor folytonos, ha $f \in C_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R})$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a $t \mapsto T_\ell(t)$ nem normafolytonos $t = 0$-ban a fenti tereken. Legyen $h > 0$ tetszőleges. Ekkor konstruálható olyan f_h függvény a fenti terek mindegyikében (gondoljunk „csúcsos” folytonos függvényekre), amelyre

$$\|T_\ell(h)f_h - T_\ell(0)f_h\| = \sup_{s\in\mathbb{R}} |f_h(s+h) - f_h(s)| = 1,$$

tehát $\|T_\ell(h) - T_\ell(0)\| \nrightarrow 0$, $h \to 0$.
A második állítás következik abból, hogy tetszőleges $h > 0$, $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ esetén

$$\begin{aligned}\|T_\ell(t+h)f - T(t)f\| &= \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(t+s+h) - f(t+s)| \\ &= \sup_{s\in\mathbb{R}} |f(s+h) - f(s)| \to 0,\ h \to 0\end{aligned}$$

pontosan akkor teljesül, ha $f \in C_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R})$. □

1.46. Definíció. Legyen $I = \mathbb{R}_+$. Ekkor a baleltolás-operátort ugyanúgy definiáljuk az 1.43. Jelölésben bevezetett tereken, mint az (1.10) egyenletben. A jobbeltolás legyen a folytonos függvények terein

$$(T_r(t)f)(s) := \begin{cases} f(s-t), & s-t \geq 0; \\ f(0), & s-t < 0, \end{cases}$$

$L^p(\mathbb{R}_+)$-on pedig

$$(T_r(t)f)(s) := \begin{cases} f(s-t), & s-t \geq 0; \\ 0, & s-t < 0. \end{cases}$$

Természetesen az 1.45. Állítás érvényben marad $I = \mathbb{R}_+$ esetén is.

1.47. Definíció. Legyen $I = [a, b]$. Ekkor a baleltolás-operátor a folytonos függvények terein

$$(T_\ell(t)f)(s) := \begin{cases} f(s+t), & s+t \leq b; \\ f(b), & s+t > b, \end{cases}$$

$L^p[a, b]$-n pedig

$$(T_\ell(t)f)(s) := \begin{cases} f(s+t), & s+t \leq b; \\ 0, & s+t > b. \end{cases}$$

1.48. Definíció. Egy $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoportot *nilpotens*nek hívunk, ha létezik olyan $t_0 \geq 0$, amelyre $T(t_0) = 0$. Ekkor természetesen minden $t > t_0$ esetén is $T(t) = 0$.

1.49. Állítás. *A baleltolás-félcsoport $(T_\ell(t))_{t\geq 0}$ nilpotens $L^p[a, b]$-n, azaz*

$$T_\ell(t) = 0,$$

ha $t \geq b - a$.

1.5. Erősen folytonos operátorfélcsoportok

Amint az előző fejezet példáiból láthattuk, sok esetben a leggyakrabban előforduló, függvénytereken ható operátorfélcsoportok nem egyenletesen folytonosak. Az 1.35. és az 1.40. Állítások (b) pontjában szereplő, ún. erős folytonosság azonban olyan tulajdonság, mely a legtöbb példában szereplő félcsoportra teljesül.

1.50. Definíció. Legyen X Banach-tér. Az X-en értelmezett, korlátos lineáris operátorokból álló $(T(t))_{t\geq 0}$ operátorcsaládot *(egyparaméteres) erősen folytonos félcsoport*nak vagy C_0-*félcsoport*nak nevezzük, ha kielégíti az

$$\text{(FE)} \qquad \begin{cases} T(t+s) &= T(t)T(s), \quad t,s \geq 0; \\ T(0) &= \mathrm{Id} \end{cases}$$

függvényegyenletet, továbbá a

$$\text{(EF)} \qquad \xi_x : t \mapsto \xi_x(t) := T(t)x$$

pályaleképezések (ezeket időnként *pályá*nak is fogjuk hívni) folytonosak $\mathbb{R}_+$-on minden $x \in X$ esetén.

Ha az (FE) és (EF) tulajdonságok $\mathbb{R}$-en is teljesülnek minden $t, s \in \mathbb{R}$ esetén, akkor az operátorcsaládot *(egyparaméteres) erősen folytonos csoport*nak nevezzük, és jelöljük mint $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$.
Ezen erősen folytonos (fél)csoportok lesznek jelen jegyzet főszereplői.

1.5.1. Alapvető tulajdonságok

Elsőként azt vizsgáljuk meg, hogy az erős folytonosság (EF) tulajdonságát hogyan lehet könnyen igazolni konkrét operátorcsaládok esetén.

1.51. Lemma. *Legyen X Banach-tér, $F : K \to \mathscr{L}(X)$ függvény, ahol $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) Minden $x \in X$ esetén a $K \ni t \mapsto F(t)x \in X$ leképezés folytonos (vagyis F erősen folytonos);

(ii) F egyenletesen korlátos K-n, és a $K \ni t \mapsto F(t)x \in X$ leképezés folytonos minden $x \in D$ esetén, ahol $D \subset X$ sűrű részhalmaz.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Következik abból, hogy az $(F(t))_{t\in K}$ függvénycsalád pontonként korlátos az X Banach-téren (hiszen kompakt halmaz folytonos képe korlátos), majd alkalmazzuk az egyenletes korlátosság tételét. A D altér pedig választható $D := X$-nek.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Legyen $\|F(s)\| \leq M$, $s \in K$. Legyen $x \in X$, $t \in \mathbb{R}_+$ rögzített. Megmutatjuk,

hogy $K \ni s \mapsto F(s)x \in X$ leképezés folytonos t-ben. Ehhez vegyünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Azt kell igazolni, hogy létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $s \in K$, $|s - t| < \delta$, akkor

$$\|F(s)x - F(t)x\| < \varepsilon.$$

A D halmaz sűrűsége miatt létezik olyan $d_{\varepsilon,x} =: d \in D$ melyre

$$\|x - d\| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

A (ii) tulajdonság miatt d-hez és ε-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $s \in K$, $|s - t| < \delta$, akkor

$$\|F(s)d - F(t)d\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Legyen $s \in K$, $|s - t| < \delta$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|F(s)x - F(t)x\| &\leq \|F(s)x - F(s)d\| + \|F(s)d - F(t)d\| + \|F(t)d - F(t)x\| \\
&\leq \|F(s)\| \cdot \|x - d\| + \|F(s)d - F(t)d\| + \|F(t)\| \cdot \|x - d\| \\
&< M \cdot {}^{\varepsilon}\!/_{3M} + {}^{\varepsilon}\!/_{3} + M \cdot {}^{\varepsilon}\!/_{3M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Ezen lemma segítségével belátható, hogy az (EF) tulajdonság már jóval gyengébb feltételekből is következik.

1.52. Állítás. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport az X Banach-téren. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos;*

(ii) $\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$ *minden* $x \in X$ *esetén;*

(iii) Léteznek $\delta > 0$, $M \geq 1$ *számok, és* $D \subset X$ *sűrű részhalmaz, melyekre*

  (a) $\|T(t)\| \leq M$ *minden* $t \in [0, \delta]$*;*

  (b) $\lim\limits_{t\downarrow 0} T(t)x = x$ *minden* $x \in D$ *esetén.*

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (iii)(b)$: könnyen látható.
$(i) \Rightarrow (iii)(a)$: Indirekt, tegyük fel, hogy létezik olyan $(\delta_n) \subset \mathbb{R}_+$, $\delta_n \to 0$ sorozat, amelyre $\|T(\delta_n)\| \to \infty$. Az egyenletes korlátosság tétele miatt ekkor létezik $x \in X$, melyre $\|T(\delta_n)x\|$ normák nem korlátosak, ami ellentmond az erős folytonosságnak.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: Legyen $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \to 0$ tetszőleges sorozat. A (iii) tulajdonság miatt $x \in D$ esetén $T(t_n)x \to x$, továbbá van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$-re $\|T(t_n)\| \leq M$. Legyen

$$K := \{t_n : n \geq N\} \cup \{0\}.$$

Ekkor K kompakt halmaz $\mathbb{R}$-ben, $T : K \to \mathscr{L}(X)$ korlátos és D-n erősen folytonos. Ekkor az 1.51. Lemma miatt X-en is erősen folytonos. Mivel a (t_n) sorzat tetszőleges volt, (ii) teljesül.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Legyen $t_0 > 0$, $x \in X$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy $t \mapsto T(t)x$ folytonos t_0-ban. Ehhez legyen először $h > 0$. Ekkor (FE) és (ii) miatt

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0)\| \cdot \|T(h)x - x\| \to 0,$$

ha $h \downarrow 0$.
Legyen most $h < 0$. Ekkor szintén az (FE) egyenletből adódik, hogy

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0 + h)\| \cdot \|x - T(-h)x\|.$$

A (ii) miatt a 2. tényező 0-hoz tart, ha $h \uparrow 0$. Legyen $0 < \delta < t_0$ tetszőleges, $h \in [-\delta, 0]$. Ekkor

$$\|T(t_0 + h)\| \leq \|T(t_0 - \delta)\| \cdot \|T(\delta + h)\|,$$

és $\delta + h \in [0, \delta]$. Itt a

$$\Big\{\|T(\delta + h)\|, \quad h \in [-\delta, 0]\Big\}$$

halmaz korlátos, ami ugyanúgy látható, mint $(i) \Rightarrow (iii)(a)$ (ott is csak a 0-ban való erős folytonosságot használtuk). Tehát a

$$\Big\{\|T(t_0 + h)\|, \quad h \in [-\delta, 0]\Big\}$$

halmaz korlátos, így

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \to 0, \quad h \uparrow 0.$$

□

Az 1.52. Állítás segítségével gyakran bizonyíthatjuk egy adott félcsoport erős folytonosságát, mivel sok esetben $T(t)$ egyenletes korlátossága egy $[0, \delta]$ intervallumon könnyen igazolható, valamint ξ_x folytonos, ha x egy „szép” sűrű részhalmazból való.

Az 1.51. Lemmából következik a félcsoportok alábbi hasznos tulajdonsága is.

1.53. Következmény. *Ha $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren, akkor tetszőleges $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ kompakt intervallum esetén a*

$$\Big\{T(t) : t \in [a,b]\Big\} \subset \mathscr{L}(X)$$

halmaz egyenletesen (normában) korlátos.

Ebből az is következik, hogy egy erősen folytonos félcsoport exponenciálisan korlátos $\mathbb{R}_+$-on.

1.54. Állítás. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport. Ekkor léteznek $w \in \mathbb{R}$ és $M \geq 1$ konstansok, melyekre*

$$\|T(t)\| \leq M \cdot \mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq 0. \tag{1.11}$$

Bizonyítás. Legyen $M \geq 1$ definiálva mint

$$M := \sup_{s\in[0,1]} \|T(s)\|.$$

Ez véges az 1.53. Következmény miatt. Legyen $t \geq 0$ tetszőleges. Írjuk fel t-t $t = n + s$ alakban, ahol $n \in \mathbb{N}$, $s \in [0,1)$. Ekkor

$$\begin{aligned}\|T(t)\| = \|T(n+s)\| &\leq \|T(s)\| \cdot \|T(n)\| \leq \|T(s)\| \cdot \|T(1)\|^n \\ &\leq M \cdot \mathrm{e}^{n \ln \|T(1)\|} \leq M \cdot \mathrm{e}^{n \ln M} \leq M \cdot \mathrm{e}^{tw},\end{aligned}$$

ahol $w := \ln M$. □

A fenti tulajdonságú w-k infimuma fontos szerepet fog játszani a félcsoportok vizsgálatában.

1.55. Definíció. Legyen $T := (T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport. Definiálja

$$\omega_0 = \omega_0(T) := \inf\Big\{w \in \mathbb{R} : \exists\, M_w \geq 1, \text{ melyre } \|T(t)\| \leq M_w \cdot \mathrm{e}^{wt},\ t \geq 0\Big\} < \infty \tag{1.12}$$

a $(T(t))_{t\geq 0}$ *növekedési korlátját* vagy *típusát.* A félcsoportot *korlátos*nak mondjuk, ha $w = 0$ választható, és *kontraktív*nak, ha $w = 0$, $M_0 = 1$ választható. A félcsoport *izometrikus*, ha $\|T(t)x\| = \|x\|$ minden $t \geq 0$, $x \in X$ esetén.

Az alábbiakban látni fogjuk, hogy

1. $\omega_0 = -\infty$ előfordulhat;
2. az infimum az (1.12) definícióban nem feltétlenül vétetik fel;
3. $M > 1$ szükséges lehet.

1.56. Példa.

1. Ha $(T(t))_{t\geq 0}$ nilpotens (pl. a baleltolás $L^1[0,1]$-en), akkor $\omega_0 = -\infty$.
2. Legyen
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Az 1.8.2. Példa alapján az A által generált félcsoport, $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$
$$T(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
alakú. Könnyen látható, hogy $\omega_0 = 0$, azonban $\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = \infty$, tehát a félcsoport nem korlátos.
3. Legyen $X := L^1(\mathbb{R})$, és definiáljuk az eltolás-félcsoportot „ugrással” az alábbi módon
$$(T(t)f)(s) := \begin{cases} 2f(s+t), & s \in [-t, 0], \\ f(s+t), & \text{egyébként.} \end{cases}$$
Ekkor könnyen látható, hogy $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport, $\|T(t)\| = 2$, ha $t > 0$, hiszen
$$\|T(t)\chi_{[0,t]}\| = 2\|\chi_{[0,t]}\|.$$
Tehát a félcsoport korlátos, de bármilyen nagy w-hez $M_w > 1$ választandó.

1.5.2. Standard konstrukciók

Az alábbiakban $(T(t))_{t\geq 0}$ egy erősen folytonos félcsoportot jelöl az X Banach-téren. A konstruált félcsoportok tulajdonságai könnyen meggondolhatók, az olvasóra bízzuk.

Hasonló félcsoportok: Legyen Y egy Banach-tér, $V : Y \to X$ izomorfizmus. Ekkor

$$S(t) := V^{-1}T(t)V, \quad t \geq 0$$

a $(T(t))_{t\geq 0}$-hez *hasonló*, erősen folytonos félcsoport az Y téren.

Átskálázott félcsoportok: Legyen $\mu \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$, az $(S(t))_{t\geq 0}$ *átskálázott félcsoport*

$$S(t) := \mathrm{e}^{\mu t}T(\alpha t), \quad t \geq 0.$$

Ha $\mu = -\omega_0$ (vagy $\mu < -\omega_0$) és $\alpha = 1$, akkor az új félcsoport növekedési korlátja 0 (vagy kisebb, mint 0).

Megszorított félcsoportok: Ha $Y \subset X$ zárt altér, melyre $T(t)Y \subset Y$, $t \geq 0$, azaz Y $(T(t))_{t\geq 0}$-invariáns, akkor

$$T(t)_| := T(t)_{|_Y}, \quad t \geq 0$$

az *(altérre) megszorított félcsoport* Y-on.

Hányados (kvóciens) félcsoportok: Legyen $Y \subset X$ zárt $(T(t))_{t\geq 0}$-invariáns altér. Tekintsük az $X_/ := X/_Y$ hányados (vagy kvóciens) teret a kanonikus $q : X \to X_/$ kvóciens-leképezéssel. A hányados-operátorok

$$T(t)_/(q(x)) := q(T(t)x), \quad x \in X, \ t \geq 0$$

erősen folytonos félcsoportot alkotnak az $X_/$ téren, melyet $\left(T(t)_/\right)_{t\geq 0}$ *hányados (kvóciens) félcsoport*nak nevezünk.

Adjungált félcsoportok: Legyen $X := H$ Hilbert-tér. Ekkor a félcsoport operátorainak adjungáltjaiból álló $(T^*(t))_{t\geq 0}$ is erősen folytonos félcsoport H-n.

Szorzat félcsoportok: Legyen $(S(t))_{t\geq 0}$ egy másik félcsoport, ami kommutál a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoporttal, vagyis

$$T(t)S(t) = S(t)T(t), \quad t \geq 0.$$

Ekkor az

$$U(t) := T(t)S(t), \quad t \geq 0$$

operátorok erősen folytonos félcsoportot alkotnak, melyet $(T(t))_{t\geq 0}$ és $(S(t))_{t\geq 0}$ *szorzat félcsoport*jának nevezünk.

1.6. Feladatok

1.1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi 2×2-es A mátrixok esetén e^{tA}-t!

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Feladat. Bizonyítsuk be az 1.33. Állítást!

1.3. Feladat. Bizonyítsuk be az 1.35. Állítást!

1.4. Feladat. Bizonyítsuk be az 1.36. Állítást!

1.5. Feladat. Bizonyítsuk be az 1.38. Állítást!

1.6. Feladat. Bizonyítsuk be az 1.40. Állítást!

1.7. Feladat. Bizonyítsuk be az 1.41. Állítást!

2. fejezet

Félcsoportok, generátorok, rezolvensek

Az egyenletesen folytonos félcsoportoknál láttuk, hogy mindig létezik egy $A \in \mathscr{L}(X)$ operátor, melyre

$$T(t) = \mathrm{e}^{tA}, \quad t \geq 0.$$

Erősen folytonos félcsoportok esetén is tudunk definiálni egy A operátort, amely valamilyen módon a fenti analógja, és amelyet a félcsoport generátorának fogunk nevezni. Ez lineáris, de általában nem korlátos operátor, mely az X tér egy $D(A)$ sűrű részhalmazán van definiálva. Hogy a félcsoportot visszakapjuk a generátorából, szükségünk lesz az ún. rezolvensoperátorra, melyet

$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$$

definiál megfelelő $\lambda \in \mathbb{C}$ komplex számok esetén.

2.1. Félcsoport generátora és annak rezolvense

Egyenletesen folytonos félcsoportok esetén láttuk, hogy a $t \mapsto T(t)$ leképezés differenciálható is, és a $t = 0$ pontbeli jobb oldali derivált az az $A \in \mathscr{L}(X)$ operátor, melyre $T(t) = \mathrm{e}^{tA}$. Erősen folytonos félcsoportok esetén – általában – legfeljebb a

$$\xi_x : t \mapsto T(t)x \in X$$

pályák differenciálhatóságában reménykedhetünk.

2.1. Példa. Az 1.45. Állításban láttuk, hogy az eltoláscsoport $\mathbb{R}$-en nem egyenletesen folytonos egyik felsorolt téren sem. Így nyilván nem is lehet normában differenciálható.

2.2. Lemma. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport, $x \in X$. Ekkor a ξ_x pályára az alábbiak ekvivalensek.*

(i) ξ_x differenciálható $\mathbb{R}_+$-on;

(ii) ξ_x jobbról differenciálható $t = 0$-ban.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: azonnal adódik.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Legyen $t > 0$ adva. Ekkor az (FE) egyenlet és a $T(t)$ operátor korlátossága miatt

$$\begin{aligned}\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\Big(T(t+h)x - T(t)x\Big) &= T(t) \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\Big(T(h)x - x\Big)\\ &= T(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_x(0),\end{aligned}$$

tehát ξ_x jobbról differenciálható $\mathbb{R}_+$-on. A balról való differenciálhatósághoz legyen most $t > 0$ és $-t \leq h < 0$ rögzítve. Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Big(T(t+h)x - T(t)x\Big) - T(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_x(0) &= T(t+h)\Big(\frac{1}{h}\left(x - T(-h)x\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_x(0)\Big)\\ &\quad + \Big(T(t+h)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_x(0) - T(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_x(0)\Big).\end{aligned}$$

Ha $h \uparrow 0$, akkor a jobb oldal első tagja 0-hoz tart, mivel a $\|T(t+h)\|$ normák korlátosak, és a (ii) tulajdonságot feltettük. A 2. tag pedig a félcsoport erős folytonossága miatt tart 0-hoz. Tehát, ξ_x balról is differenciálható, és

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_x(t) = T(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_x(0), \quad t \geq 0. \tag{2.1}$$

$\square$

2.3. Definíció. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren. A $(T(t))_{t\geq 0}$ *generátora* az az $A : D(A) \subset X \to X$ operátor, melyre

$$Ax := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_x(0) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \tag{2.2}$$

minden x-re a $D(A)$-ból, ahol

$$D(A) = \{x \in X : \xi_x \text{ differenciálható}\}. \tag{2.3}$$

Időnként hangsúlyozzuk, mi az A operátor értelmezési tartománya, és jelöljük: $(A, D(A))$.

A 2.2. Lemma alapján

$$D(A) = \left\{x \in X : \exists \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h}\right\}. \tag{2.4}$$

2.4. Lemma. *Legyen $(A, D(A))$ a $(T(t))_{t \geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

(a) $A : D(A) \subset X \to X$ lineáris operátor.

(b) Ha $x \in D(A)$, akkor $T(t)x \in D(A)$ (vagyis $D(A)$ $T(t)$-invariáns), továbbá

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \quad t \geq 0. \tag{2.5}$$

(c) Minden $t \geq 0$, $x \in X$ esetén

$$\int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s \in D(A).$$

(d) Minden $t \geq 0$ esetén

$$T(t)x - x = A \int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s, \quad \textit{ha } x \in X, \tag{2.6}$$

$$= \int_0^t T(s)Ax \, \mathrm{d}s, \quad \textit{ha } x \in D(A). \tag{2.7}$$

Bizonyítás.

(a) Mivel A lineáris operátorok összegének határtéke, ezért nyilván lineáris.

(b) Legyen $x \in D(A)$ tetszőleges. Ekkor

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T(t+h)x - T(t)x) = T(t) \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} = T(t)Ax.$$

Az (FE) tulajdonság miatt a fenti limesz azonos az alábbival

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (T(h)T(t)x - T(t)x),$$

és mivel ez létezik, $T(t)x \in D(A)$ és $AT(t)x = T(t)Ax$.

(c) és

(d) Legyen $x \in X$, $t \geq 0$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\Big(T(h)\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s - \int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\Big)\\
&= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)x\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)x\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

ez pedig tart $T(t)x - x$-hez, ha $h \downarrow 0$, ami így egyenlő $A\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s$-sel. Tehát (c) és (2.6) fennáll. Ha $x \in D(A)$, akkor az

$$s \mapsto T(s)\frac{T(h)x - x}{h}$$

függvények $[0,t]$-n egyenletesen tartanak az $s \mapsto T(s)Ax$ függvényhez, ha $h \downarrow 0$, mivel az 1.53. Következmény szerint a $T(s)$ operátorok egyenletesen korlátosak $[0,t]$-n. Ezért

$$\begin{aligned}
\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\left(T(h) - \mathrm{Id}\right)\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s &= \lim_{h\downarrow 0}\int_0^t T(s)\frac{1}{h}\left(T(h) - \mathrm{Id}\right)x\,\mathrm{d}s\\
&= \int_0^t T(s)Ax\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

tehát (2.7) teljesül. □

2.5. Definíció. Legyen $A : D(A) \subset X \to X$ lineáris operátor. Azt mondjuk, hogy A *zárt*, ha az alábbi (ekvivalens) feltételek valamelyike teljesül rá:

(i) Ha egy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ és $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y \in X$ léteznek, akkor $x \in D(A)$ és $Ax = y$;

(ii) A

$$\mathcal{G}(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$$

gráf zárt halmaz;

(iii) Az $X_1^A := (D(A), \|\cdot\|_A)$ tér Banach-tér, ahol

$$\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|, \quad x \in D(A).$$

Ha A korlátos, akkor természetesen A zárt is. A fordított irányú állítás nem igaz, ezt mutatja az alábbi példa.

2.6. Példa. Legyen $X := C[0,1]$, ellátva a szokásos maximum-normával. Definiálja az $A : D(A) \subset X \to X$ operátort

$$Af := f', \quad f \in D(A) = \{f \in C[0,1] : f' \in C[0,1]\} = C^1[0,1].$$

A $\lim_{n\to\infty} f_n = f \in X$ és $\lim_{n\to\infty} Af_n = g \in X$ feltételek azt jelentik, hogy

$$f_n \hookrightarrow f, \ f_n' \hookrightarrow g.$$

Analízis órán láttuk, hogy ekkor f is differenciálható és $f' = g \in C[0,1]$, tehát $f \in D(A)$ és $Af = g$. Így $(A, D(A))$ zárt.
Másrészt, A nem korlátos, hiszen tudunk mutatni olyan $(f_n) \subset D(A)$ sorozatot, melyre $\|f_n\| = 1$, de $\|f_n'\| \to \infty$. Ilyen például az $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat.

Az előbbi példában még az is igaz, hogy $D(A)$ sűrű X-ben. Most igazoljuk, hogy egy félcsoport generátora is ilyen tulajdonságú.

2.7. Tétel. *Egy erősen folytonos félcsoport generátora zárt és sűrűn definiált lineáris operátor, amely egyértelműen meghatározza a félcsoportot.*

Bizonyítás. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren. Ahogy láttuk, az $(A, D(A))$ generátor lineáris operátor. A zártság igazolásához legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ sorozat, melyre $x_n \to x$, $Ax_n \to y$. A (2.7) egyenlőség szerint

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n \,\mathrm{d}s$$

minden $t > 0$ esetén. Mivel a $(T(\cdot)Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen tart $[0,t]$-n $T(\cdot)y$-hoz, ezért

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y \,\mathrm{d}s.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $1/t$-vel, és tartsunk t-vel jobbról 0-hoz. Ebből

$$Ax = T(0)y = y,$$

így A zártsága következik.

Legyen $x \in X$ tetszőleges. A 2.4. Lemma (c) pontja alapján ${}^{1}\!/{}_{t}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s \in D(A)$ minden t-re. A félcsoport erős folytonossága miatt

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s = x$$

teljesül, így $D(A)$ sűrű X-ben.

Végül, legyen $(S(t))_{t\geq 0}$ egy másik erősen folytonos félcsoport X-en, melynek ugyanúgy $(A, D(A))$ a generátora. Tetszőleges $x \in D(A)$, $t > 0$ esetén tekintsük a

$$s \mapsto \eta_x(s) := T(t-s)S(s)x, \quad 0 \leq s \leq t$$

leképezést. Ennek differenciahányadosa

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(\eta_x(s+h)-\eta_x(s)\right) = T(t-s-h)\frac{1}{h}\left(S(s+h)x - S(s)x\right)\\ - \frac{1}{-h}\left(T(t-s-h)-T(t-s)\right)S(s)x\end{aligned}$$

Legyen most $h \downarrow 0$. Ekkor a 2. tag limesze $AT(t-s)S(s)x$. Megmutatjuk,hogy az 1. tag limesze $T(t-s)AS(s)x$. Ezt igazolandó legyen $h \in (0,1]$, ekkor

$$\begin{aligned}&\|T(t-s-h){}^{1}\!/{}_{h}\Big(S(s+h)x - S(s)x\Big) - T(t-s)AS(s)x\|\\ &\leq \|T(t-s-h)\Big({}^{1}\!/{}_{h}\left(S(s+h)x - S(s)x\right) - AS(s)x\Big)\|\\ &+ \|\left(T(t-s-h) - T(t-s)\right)AS(s)x\|.\end{aligned}$$

Az 1.53. Következmény szerint létezik olyan $M > 0$ szám, hogy $\|T(t-s-h)\| \leq M$, ha $h \in (0,1]$. Ezért

$$\begin{aligned}&\|T(t-s-h){}^{1}\!/{}_{h}\Big(S(s+h)x - S(s)x\Big) - T(t-s)AS(s)x\|\\ &\leq M\|{}^{1}\!/{}_{h}\Big(S(s+h)x - S(s)x\Big) - AS(s)x\| + \|\left(T(t-s-h)-T(t-s)\right)AS(s)x\| \to 0,\end{aligned}$$

ha $h \downarrow 0$. A (2.5) egyenlőség miatt tehát

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\eta_x(s) = 0, \quad s \in [0,t],$$

így

$$T(t)x = \eta_x(0) = \eta_x(t) = S(t)x,$$

ha $x \in D(A)$. Mivel $D(A)$ sűrű és $t > 0$ tetszőleges volt, ezért $T(t) = S(t)$, $t \geq 0$.

□

2.8. Tétel (Zárt gráf)**.** *Legyen $A : D(A) \subset X \to X$ zárt operátor. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) $(A, D(A))$ *korlátos operátor, azaz létezik* $M \geq 0$, *melyre* $\|Ax\| \leq M\|x\|$, $x \in D(A)$*;*

(ii) $D(A)$ *zárt* X*-ben.*

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Legyen $(x_n) \subset D(A)$, $x_n \to x$ sorozat. Ekkor (x_n) Cauchy-sorozat $D(A)$-ban, és (i) miatt

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\| \to 0,\ n, m \to \infty.$$

Tehát (Ax_n) is Cauchy-sorzat, így konvergens is. Legyen $y = \lim_{n\to\infty} Ax_n$. Mivel A zárt, az eddigiekből következik, hogy $x \in D(A)$ (és $y = Ax$). Tehát $D(A)$ zárt.
$(ii) \Rightarrow (i)$: mély, nem bizonyítjuk. $\square$

Mivel egy $(A, D(A))$ generátor mindig sűrűn definiált, ezért a 2.8. Zártgráf-tétel (ii) feltétele esetünkben azt jelenti, hogy $D(A) = X$. Ennek segítségével látható be az alábbi következmény.

2.9. Következmény. *Legyen $(A, D(A))$ a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) Az A generátor korlátos, azaz létezik $M > 0$, melyre $\|Ax\| \leq M\|x\|$, $x \in D(A)$;

(ii) $D(A) = X$*;*

(iii) $D(A)$ *zárt* X*-ben;*

(iv) A $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport egyenletesen folytonos.

Ha a fentiek közül bármelyik teljesül, akkor

$$T(t) = \mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \quad t \geq 0.$$

Bizonyítás. Az $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ ekvivalenciák a 2.7. és a 2.8. Tételekből adódnak. Az $(i) \Leftrightarrow (iv)$, valamint a félcsoport előállítása pedig következik abból, hogy az 1.27. Tétel alapján egy egyenletesen folytonos félcsoport $T(t) = \mathrm{e}^{tB}$ alakú valamely $B \in \mathscr{L}(X)$ operátorra. A generátor definíciójából adódik, hogy ebben az esetben $A = B$. $\square$

2.10. Definíció. Legyen $A : D(A) \subset X \to X$ lineáris operátor. A $D \subset D(A)$ altér A *lényeges része* (angolul: core), ha sűrű $D(A)$-ban a $\|\cdot\|_A$ normára nézve.

2.11. Állítás. *Legyen $(A, D(A))$ a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora. Legyen $D \subset D(A)$ $\|\cdot\|$-sűrű X-ben és $T(t)$-invariáns. Ekkor D az A lényeges része.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk, a fenti technikákkal kijön. □

2.12. Állítás. *Legyen $(A, D(A))$ a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora. Ekkor*

$$D(A^\infty) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$$

az A lényeges része (itt $D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in D(A)\}$).

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk, az előző állítással igazolható. □

Az alábbiakban bevezetjük a generátor rezolvensének fogalmát. Ehhez szükségünk lesz némi spektrálelméletre.

2.13. Definíció. Legyen $(A, D(A))$ zárt operátor. Ekkor A *rezolvenshalmaza*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ bijektív}\}. \tag{2.8}$$

Legyen A *spektruma*

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ nem bijektív}\}. \tag{2.9}$$

Az A *rezolvense* a $\lambda \in \rho(A)$ pontban

$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}. \tag{2.10}$$

2.14. Állítás. *Legyen $(A, D(A))$ zárt operátor. Ekkor*

(a) $\rho(A)$ nyílt halmaz $\mathbb{C}$-ben. Következésképpen, $\sigma(A)$ zárt.

(b) $R(\lambda, A)$ korlátos operátor minden $\lambda \in \rho(A)$ esetén.

Bizonyítás.

(a) Később, ld. a 2.19. Következmény bizonyítását.

(b) A feltételből következik, hogy $\lambda - A$ is zárt, továbbá zárt operátor inverze is zárt. Mivel $\lambda \in \rho(A)$ esetén $\lambda - A$ szürjektív is, így $R(\lambda, A)$ az egész X-en van értelmezve, és a 2.8. Tétel miatt korlátos is. $\square$

Most igazolunk két, a (2.6) és a (2.7) egyenletekhez hasonló egyenlőséget, amelyek sok fontos későbbi állításunk bizonyításának alapját fogják képezni.

2.15. Állítás. *Legyen $(A, D(A))$ a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$, $t > 0$ tetszőleges. Ekkor*

$$\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x - x = (A - \lambda)\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x\,\mathrm{d}s, \quad \textit{ha } x \in X, \tag{2.11}$$

$$= \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)(A - \lambda)x\,\mathrm{d}s, \quad \textit{ha } x \in D(A). \tag{2.12}$$

Bizonyítás. Legyen

$$S(t) := \mathrm{e}^{-\lambda t}T(t), \quad t \geq 0$$

átskálázott félcsoport. Könnyen látható, hogy a generátora $B = A - \lambda$, $D(B) = D(A)$. Alkalmazzuk a 2.4. Lemma (d) pontját az $(S(t))_{t\geq 0}$ félcsoportra. $\square$

2.16. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy ha az $(A, D(A))$ operátor zárt, $B \in \mathscr{L}(X)$ korlátos, akkor $(A+B, D(A))$ is zárt. Ha azonban csak annyit teszünk fel, hogy $(B, D(B))$ zárt, akkor $(A + B, D(A) \cap D(B))$ nem feltétlenül zárt. Keressünk ilyen példát!

2.17. Tétel. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren, és legyenek $w \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ olyan konstansok, melyekre*

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq 0,$$

ld. az 1.54. Állítást. Ekkor a félcsoport $(A, D(A))$ generátorára az alábbiak teljesülnek.

(a) Ha $\lambda \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $R(\lambda)x := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x\,\mathrm{d}s$ létezik minden $x \in X$ esetén, akkor $\lambda \in \rho(A)$ és $R(\lambda) = R(\lambda, A)$.

(b) Ha $\operatorname{Re}\lambda > w$, akkor $\lambda \in \rho(A)$ és a rezolvens az (a) pont alatti integrál alakú.

(c) Minden $\operatorname{Re}\lambda > w$ esetén teljesül az alábbi becslés:

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - w}.$$

2.18. *Megjegyzés.* A fenti 2.17. Tétel (a) pontjában szereplő integrálalak természetesen mint improprius Riemann-integrál értendő, vagyis a feltételek teljesülése esetén

$$R(\lambda, A)x = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x \, \mathrm{d}s, \quad x \in X.$$

A továbbiakban ezt röviden így fogjuk jelölni:

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) \, \mathrm{d}s, \tag{2.13}$$

és a rezolvens *integrál-reprezentációjának* hívjuk (ami nem más, mint a félcsoport Laplace-transzformáltja).

Bizonyítás. (2.17. Tételé)

(a) Átskálázás után feltehetjük, hogy $\lambda = 0$. Legyen $x \in X$ tetszőleges. Ekkor bármely $h > 0$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - \mathrm{Id}}{h} R(0)x &= \frac{T(h) - \mathrm{Id}}{h} \int_0^\infty T(s)x \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s+h)x \, \mathrm{d}s - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)x \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{h} \int_h^\infty T(s)x \, \mathrm{d}s - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)x \, \mathrm{d}s \\
&= -\frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Ha $h \downarrow 0$, akkor a kapott kifejezés $-x$-hez tart. Így $\operatorname{ran} R(0) \subset D(A)$ és $AR(0) = -\mathrm{Id}$. Másrészt, ha $x \in D(A)$, akkor

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s = R(0)x,$$

és a 2.4. Lemma (d) pontja alapján

$$\lim_{t\to\infty} A \int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s = \lim_{t\to\infty} \int_0^t T(s)Ax \, \mathrm{d}s = R(0)Ax.$$

Mivel A zárt és $\int_0^t T(s)x \, \mathrm{d}s \in D(A)$ minden t-re, az előbbiek alapján $AR(0)x = R(0)Ax = -x$. Tehát $R(0) = (-A)^{-1}$ következik.

(b) és

(c) Következik (a)-ból és az alábbi becslésből

$$\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x\,\mathrm{d}s\right\| \leq \left(M\int_0^t \mathrm{e}^{(w-\operatorname{Re}\lambda)s}\,\mathrm{d}s\right)\cdot\|x\|.$$

Ha $\operatorname{Re}\lambda > w$, akkor a jobb oldal első tényezője tart $M/(\operatorname{Re}\lambda - w)$-hez, $t\to\infty$ esetén.

□

2.19. Következmény. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren, és $w\in\mathbb{R}$, $M\geq 1$ olyan konstansok, melyekre*

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt},\quad t\geq 0.$$

Legyen $\lambda\in\mathbb{C}$, melyre $\operatorname{Re}\lambda > w$ és legyen $n\in\mathbb{N}$. Ekkor a félcsoport generátorának rezolvensére

$$R(\lambda,A)^n x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}R(\lambda,A)x \tag{2.14}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x\,\mathrm{d}s \tag{2.15}$$

minden $x\in X$ esetén. Továbbá

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - w)^n}. \tag{2.16}$$

Bizonyítás. Legyen $\mu\in\mathbb{C}$ olyan szám, melyre $|\lambda-\mu| < 1/\|R(\lambda,A)\|$. Megmutatjuk, hogy $\mu\in\rho(A)$ és

$$R(\mu,A) = \sum_{n=0}^\infty (\lambda-\mu)^n R(\lambda,A)^{n+1}, \tag{2.17}$$

amiből a (2.14) állítás következik. Írjuk fel

$$\mu - A = \lambda - A + \mu - \lambda = [\operatorname{Id} - (\lambda-\mu)R(\lambda,A)]\,(\lambda - A).$$

Mivel $\lambda\in\rho(A)$, ezért ez az operátor pontosan akkor bijektív, ha $\operatorname{Id}-(\lambda-\mu)R(\lambda,A)$ invertálható. Ez teljesül, ha $|\lambda-\mu| < 1/\|R(\lambda,A)\|$. Ebből

$$R(\mu,A) = R(\lambda,A)\,[\operatorname{Id}-(\lambda-\mu)R(\lambda,A)]^{-1} = \sum_{n=0}^\infty(\lambda-\mu)^n R(\lambda,A)^{n+1}.$$

A 2.17. Tétel (a) pontját felhasználva $\operatorname{Re}\lambda > w$ esetén minden $x \in X$-re

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, A)x &= \frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x\,\mathrm{d}s\\ &= -\int_0^\infty s\mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Indukcióval kapjuk a (2.15) egyenlőséget.
Végül a (2.16) becslést a következőképpen kaphatjuk:

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, A)^n x\| &= \frac{1}{(n-1)!}\left\|\int_0^\infty s^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda s}T(s)x\,\mathrm{d}s\right\|\\ &\leq \frac{M}{(n-1)!}\int_0^\infty s^{n-1}\mathrm{e}^{(w-\operatorname{Re}\lambda)s}\,\mathrm{d}s \cdot \|x\|\\ &= \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - w)^n}\cdot\|x\|.\end{aligned}$$

$\square$

2.20. *Megjegyzés.* A fenti 2.19. Következmény bizonyításának első részében azt is beláttuk, hogy egy zárt operátor rezolvenshalmaza nyílt, vagyis igazoltuk a 2.14. Állítás (a) pontját.

A 2.17. Tétel (b) pontjából következik, hogy egy félcsoport generátorának spektruma mindig egy félsíkban fekszik. Az alábbi alakban definiált szám a legkisebb ilyen félsíkot karakterizálja.

2.21. Definíció. Tetszőleges A lineáris operátor esetén legyen A *spektrálkorlátja*

$$s(A) := \sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

A 2.17. Tétel (b) pontjából azonnal adódik a félcsoport növekedési korlátja (1.12) és generátorának spektrálkorlátja közti reláció.

2.22. Következmény. *Legyen* $(A, D(A))$ *a* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport generátora. Ekkor*

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 < +\infty.$$

Az alfejezet összefoglalásaképpen álljon itt a következő diagram.

$$
\begin{tikzcd}
& (T(t))_{t\geq 0} \arrow[dl, shift right, "Ax = \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x-x}{t}"'] \arrow[dr, "R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, dt,\ \operatorname{Re}\lambda > \omega_0"] & \\
(A, D(A)) \arrow[ur, shift right, "\text{egyértelmű}"'] \arrow[rr, shift left, "R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}"] & & (R(\lambda, A))_{\lambda\in\rho(A)} \arrow[ll, shift left, "A = \lambda - R(\lambda, A)^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

2.1. ábra. Félcsoport, generátor, rezolvens

2.2. Példák „újratöltve”

2.2.1. Standard konstrukciók

Az 1.5.2. alpont példái esetében karakterizáljuk a félcsoportok generátorát és annak rezolvensét, a bizonyításokat az olvasóra bízva. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren, melynek generátora $(A, D(A))$.

Hasonló félcsoportok: Legyen Y egy Banach-tér, $V : Y \to X$ izomorfizmus. Ekkor az $S(t) := V^{-1}T(t)V$, $t \geq 0$ hasonló félcsoport generátora

$$B := V^{-1}AV, \quad D(B) = \{y \in Y : Vy \in D(A)\}.$$

Könnyen látható, hogy $\sigma(A) = \sigma(B)$, továbbá

$$R(\lambda, B) = V^{-1}R(\lambda, A)V, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Átskálázott félcsoportok: Legyen $\mu \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$, az $S(t) := \mathrm{e}^{\mu t}T(\alpha t), \quad t \geq 0$ átskálázott félcsoport generátora

$$B = \alpha A + \mu \operatorname{Id}, \quad D(B) = D(A).$$

Könnyen látható, hogy $\sigma(B) = \alpha\sigma(A) + \mu$, továbbá

$$R(\lambda, B) = \frac{1}{\alpha} R\left(\frac{\lambda - \mu}{\alpha}, A\right), \quad \lambda \in \rho(B).$$

Ezek alapján könnyen válthatunk az eredeti és az átskálázott félcsoport között.

Megszorított félcsoportok: Legyen $Y \subset X$ zárt altér, mely $(T(t))_{t\geq 0}$-invariáns, és $T(t)_| := T(t)_{|_Y}$, $t \geq 0$ az altérre megszorított félcsoport Y-on. Ekkor $\left(T(t)_|\right)_{t\geq 0}$ generátora Y-on az az $(A_|, D(A_|))$ operátor, amelyre

$$A_| y = Ay, \quad D(A_|) = D(A) \cap Y.$$

Hányados (kvóciens) félcsoportok: Legyen $Y \subset X$ zárt $(T(t))_{t\geq 0}$-invariáns altér. Tekintsük az $X_/ := X/_Y$ hányados (vagy kvóciens) teret a kanonikus $q : X \to X_/$ kvóciens-leképezéssel. A $\left(T(t)_/\right)_{t\geq 0}$ hányados félcsoport generátora

$$A_/(q(x)) = q(A(x)), \quad D(A_/) = q(D(A)).$$

Adjungált félcsoportok: Legyen $X := H$ Hilbert-tér. Ekkor a félcsoport operátorainak adjungáltjaiból álló $(T^*(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora H-n az $(A, D(A))$ sűrűn definiált operátor adjungáltja, vagyis

$$D(A^*) = \{x \in H : \exists y \in H, \langle h, y\rangle = \langle Ah, x\rangle \text{ minden } h \in D(A)\}, \quad A^* x := y.$$

Szorzat félcsoportok: Legyen $(S(t))_{t\geq 0}$ egy másik félcsoport, ami kommutál a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoporttal, és legyen $U(t) := T(t)S(t)$, $t \geq 0$ a szorzatfélcsoport. Jelölje $(S(t))_{t\geq 0}$ generátorát $(B, D(B))$. Ekkor a 2.11. Állítás segítségével belátható, hogy az $(U(t))_{t\geq 0}$ félcsoport $(C, D(C))$ generátorának $D(A) \cap D(B)$ lényeges része, és ezen a halmazon teljesül, hogy

$$Cx = Ax + Bx, \quad x \in D(A) \cap D(B).$$

2.2.2. Standard példák

Szorzásfélcsoport

Az 1.35. ill. az 1.40. Állításokban láttuk, hogy a $C_0(\Omega)$ ill. az $L^p(\Omega)$ tereken az e^{tq}, $t \geq 0$ függvényekkel definiált szorzásoperátorok – ahol $q : \Omega \to \mathbb{C}$ folytonos ill. mérhető, a valós része (lényegesen) korlátos – erősen folytonos operátorfélcsoportot alkotnak.

2.23. Lemma. *Legyen* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos szorzásfélcsoport az* $X = C_0(\Omega)$ *vagy* $X = L^p(\Omega)$ *téren, melyre*

$$T_q(t)f := \mathrm{e}^{tq} \cdot f, \quad f \in X,\ t \geq 0.$$

Ekkor a félcsoport $(A, D(A))$ *generátora az alábbi szorzásoperátor:*

$$\begin{aligned} Af &= M_q f := q \cdot f, \\ D(A) &= D(M_q) := \{f \in X : qf \in X\}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Nem részletezzük, adódik abból, hogy

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathrm{e}^{tq(s)} f(s) - f(s)}{t} = q(s)f(s)$$

az adott Banach-tér normájában is teljesül. □

Ez a lemma, összevetve az 1.35. és az 1.36., ill. az 1.40. és az 1.41. Állításokkal, karakterizálja az erősen folytonos szorzásfélcsoportok generátorait. A következő állítás ezt mondja ki, felhasználva, hogy a szorzásoperátor spektruma a q függvény (lényeges) képhalmazának a lezártja, ld. az 1.33. ill. az 1.38. Állítást.

2.24. Állítás. *Legyen* $(A, D(A))$ *egy operátor a* $C_0(\Omega)$ *vagy* $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ *téren. Ekkor ekvivalensek:*

(i) $(A, D(A))$ *egy erősen folytonos szorzásfélcsoport generátora;*

(ii) $(A, D(A))$ *szorzásoperátor, melyre*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > w\} \subset \rho(A) \text{ valamely } w \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

Eltolás-félcsoport

Ahogy láttuk az 1.4.3. alpontban, a (bal)eltolás-operátorok

$$(T_\ell(t)f)(s) := f(s+t), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

erősen folytonos (fél)csoportot alkotnak $C_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R})$-en, ill. $L^p(\mathbb{R})$-en, $1 \leq p < \infty$.

2.25. Állítás. *A* $(T_\ell(t))_{t\geq 0}$ *(bal)eltolás-félcsoport generátora az* X *Banach-téren*

$$Af := f',$$

melyre

1. *legyen*
$$D(A) = \{f \in C_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R}) : f \text{ differenciálható, } f' \in C_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R})\},$$
ha $X = C_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R})$, *és*

2. *legyen*
$$D(A) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f \text{ abszolút folytonos, } f' \in L^p(\mathbb{R})\},$$
ha $X = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$.

Bizonyítás. Nem részletezzük, adódik abból, hogy

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(s+t) - f(s)}{t} = f'(s),$$

és ez az adott Banach-tér normájában is érvényes. □

2.26. Állítás. *A fenti* $(A, D(A))$ *deriválásoperátor rezolvensére (bármelyik* X *téren)* $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ *esetén*

$$(R(\lambda, A)f)(s) = \int_s^\infty \mathrm{e}^{-\lambda(\tau - s)} f(\tau)\,d\tau, \quad f \in X, s \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Diffúzió-félcsoport (1 dimenzióban)

2.27. Állítás. *Legyen* $X = C[0,1]$, *és definiáljuk az alábbi differenciáloperátort* X*-en Neumann-peremfeltétellel:*

$$Af := f''$$
$$D(A) = \{f \in C^2[0,1] : f'(0) = f'(1) = 0\}.$$

Ekkor $(A, D(A))$ *generátora az alább definiált* $(T(t))_{t\geq 0}$ *félcsoportnak:*

$$T(0) = \mathrm{Id};$$
$$(T(t)f)(s) = \int_0^1 k_t(s,r) f(r)\,dr, \text{ ahol}$$
$$k_t(s,r) = 1 + 2\sum_{n=1}^\infty \mathrm{e}^{-\pi^2 n^2 t} \cos(\pi n s)\cos(\pi n r),$$

$t > 0$, $s \in [0,1]$, $f \in X$.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy A zárt, sűrűn definiált. A félcsoport alakja „némi" számolással adódik abból, hogy a

$$e_n(s) := \begin{cases} 1, & n = 0; \\ \sqrt{2}\cos(\pi n s), & n \geq 1 \end{cases}$$

függvények $D(A)$-ban vannak minden n-re, továbbá,

$$Ae_n = -\pi^2 n^2 e_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A bizonyítást itt nem részletezzük. □

Diffúzió-félcsoport (n dimenzióban)

2.28. Állítás. *Legyen* $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ *és legyen* $(A, D(A))$ *a Laplace-operátor lezártja* X*-en, melyre*

$$Af = \Delta f := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial s_k^2} f(s_1, \ldots, s_n), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

ahol $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *az ún. Schwartz-tér, a végtelenszer differenciálható, gyorsan lecsengő függvények tere. Ekkor* $(A, D(A))$ *generátora az alábbi* diffúziós, hővezetési *vagy* Gauss-félcsoportnak

$$\begin{gathered} T(0) = \mathrm{Id}; \\ (T(t)f)(s) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{|s-r|^2}{4t}} f(r)\, dr, \\ t > 0,\ s \in \mathbb{R}^n,\ f \in X. \end{gathered}$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

2.3. Hille–Yosida-tételkör

Ebben az alfejezetben azzal foglalkozunk, hogy hogyan karakterizálhatók az erősen folytonos félcsoportok generátorai.

2.3.1. Csoportok és félcsoportok generálása

2.29. Lemma. *Legyen $(A, D(A))$ zárt, sűrűn definiált operátor az X Banach-téren. Tegyük fel, hogy létezik $w \in \mathbb{R}$, $M > 0$, melyekre $[w, \infty) \subset \rho(A)$ és $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq M$ minden $\lambda \geq w$. Ekkor az alábbiak teljesülnek $\lambda \to \infty$ esetén.*

(a) $\lambda R(\lambda, A)x \to x$ minden $x \in X$-re.

(b) $\lambda AR(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)Ax \to Ax$ minden $x \in D(A)$-ra.

Bizonyítás. Legyen $y \in D(A)$. Ekkor

$$\lambda R(\lambda, A)y = R(\lambda, A)(\lambda - A)y + R(\lambda, A)Ay = y + R(\lambda, A)Ay. \tag{2.19}$$

A feltételekből adódik, hogy

$$\|R(\lambda, A)Ay\| \leq \frac{M}{\lambda}\|Ay\|,$$

ezért a (2.19) kifejezés y-hoz tart, ha $\lambda \to \infty$. Mivel a $\lambda R(\lambda, A)$ operátorok a feltétel szerint egyenletesen korlátosak $[w, \infty)$-n, és ahogy láttuk, pontonként konvergensek a sűrű $D(A)$ részhalmazon, ezért a Banach–Steinhaus-tétel miatt (a) adódik. A (b) állítás pedig mindebből következik. □

2.30. Tétel (Hille–Yosida, 1948, kontrakció eset)**.** *Legyen $(A, D(A))$ lineáris operátor az X Banach-téren, ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $(A, D(A))$ egy erősen folytonos kontrakció-félcsoportot generál;

(ii) $(A, D(A))$ zárt, sűrűn definiált, minden $\lambda > 0$ esetén $\lambda \in \rho(A)$ és

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1; \tag{2.20}$$

(iii) $(A, D(A))$ zárt, sűrűn definiált, minden $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$ esetén $\lambda \in \rho(A)$ és

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}. \tag{2.21}$$

Bizonyítás. A 2.7. és a 2.17. Tételek miatt elég a $(ii) \Rightarrow (i)$ irányt bizonyítani. Definiáljuk az ún. *Yosida-approximációt* mint

$$A_n := nAR(n, A) = n^2 R(n, A) - n \operatorname{Id}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

A fenti operátorok korlátosak és kommutálnak egymással. Tekintsük az általuk generált egyenletesen folytonos félcsoportokat

$$T_n(t) := \mathrm{e}^{tA_n}, \quad t \geq 0. \tag{2.23}$$

A 2.29. Lemma (b) pontja alapján $A_n \to A$ pontonként $D(A)$-n. Ebből az alábbiakat igazoljuk.

(a) Létezik a $T(t)x = \lim_{n\to\infty} T_n(t)x$ limesz minden $x \in X$ esetén.

(b) $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos kontrakció-félcsoport.

(c) $(T(t))_{t\geq 0}$ generátora $(A, D(A))$.

(a) Minden $(T_n(t))_{t\geq 0}$ kontrakció-félcsoport, hiszen

$$\|T_n(t)\| \leq \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{\|n^2R(n,A)\|t} \leq \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{nt} = 1, \quad t \geq 0.$$

Ezért a Banach–Steinhaus-tétel miatt elég a konvergenciát $D(A)$-n igazolni. Felhasználva, hogy a $T_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ operátorok felcserélhetők, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T_n(t)x - T_m(t)x &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T_m(t-s)T_n(s)x\right)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t T_m(t-s)T_n(s)(A_nx - A_mx)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Ebből

$$\|T_n(t)x - T_m(t)x\| \leq t\|A_nx - A_mx\|. \tag{2.24}$$

A 2.29. Lemma (b) pontja alapján $(A_nx)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat minden $x \in D(A)$ esetén. Ezért, $(T_n(t)x)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens minden kompakt $[0, t_0]$ intervallumon.

(b) A $(T_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozatok pontonkénti konvergenciájából következik, hogy a limesz operátorcsalád $(T(t))_{t\geq 0}$ kielégíti az (FE) függvényegyenletet, tehát félcsoport, továbbá kontrakciókból áll. Másrészt, minden $x \in D(A)$ esetén a

$$\xi : t \mapsto T(t)x, \quad 0 \leq t \leq t_0$$

pálya egyenletes limesze folytonos függvényeknek, ld. (2.24), tehát folytonos. Így az 1.52. Állítás alapján $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos.

(c) Jelölje $(B, D(B))$ a $(T(t))_{t\geq 0}$ generátorát, és legyen $x \in D(A)$. A

$$\xi_n : t \mapsto T_n(t)x$$

leképezések minden $[0, t_0]$ kompakt intervallumon egyenletesen tartanak ξ-hez, ld. (2.24). Másrészt, a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_n : t \mapsto T_n(t)A_n x$$

deriváltfüggvények ugyanezért egyenletesen tartanak az

$$\eta : t \mapsto T(t)Ax$$

függvényhez. Ebből következik, hogy ξ differenciálható, és $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(0) = \eta(0)$, vagyis $D(A) \subset D(B)$ és $Ax = Bx$, $x \in D(A)$.
Legyen $\lambda > 0$ tetszőleges. Mivel $\lambda \in \rho(A)$, ezért $\lambda - A : D(A) \to X$ bijekció. Másrészt, $(B, D(B))$ egy kontrakció-félcsoportot generál, tehát $\lambda \in \rho(B)$ a 2.17. Tétel miatt, így $\lambda - B : D(B) \to X$ is bijekció. Láttuk, hogy $\lambda - A$ megegyezik $\lambda - B$-vel $D(A)$-n. Ezért ez csak úgy lehet, ha $D(A) = D(B)$ és $A = B$. □

Legyen a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport generátora $(A, D(A))$, és legyen valamely $w \in \mathbb{R}$ esetén

$$\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Ekkor az

$$S(t) := \mathrm{e}^{-wt}T(t), \quad t \geq 0$$

átskálázott félcsoport kontrakciókból áll, és generátora $B = A - w$ (ld. a 2.2.1. alpontot). Az ilyen tulajdonságú félcsoportokra a Hille–Yosida-tétel az alábbi formát ölti.

2.31. Következmény. *Legyen $w \in \mathbb{R}$. Egy $(A, D(A))$ lineáris operátorra az X Banach-téren az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $(A, D(A))$ *egy* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoportot generál, melyre*

$$\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq 0; \tag{2.25}$$

(ii) $(A, D(A))$ *zárt, sűrűn definiált, minden* $\lambda > w$ *esetén* $\lambda \in \rho(A)$ *és*

$$\|(\lambda - w)R(\lambda, A)\| \leq 1; \tag{2.26}$$

(iii) $(A, D(A))$ *zárt, sűrűn definiált, minden* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > w$ *esetén* $\lambda \in \rho(A)$ *és*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - w}. \tag{2.27}$$

A (2.25) egyenlőtlenséget kielégítő félcsoportokat szokás *kvázikontrakció-félcsoport*nak hívni.
Az alábbiakban látni fogjuk, hogy $(A, D(A))$ pontosan akkor generál egy erősen folytonos *csoportot*, ha A és $-A$ is egy-egy félcsoport generátora. Ennek fényében a Hille–Yosida-tétel feltételeit könnyen átfogalmazhatjuk kontrakciócsoportok, azaz izometriacsoportok generátoraira.

2.32. Következmény. *Legyen* $(A, D(A))$ *lineáris operátor az* X *Banach-téren, ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $(A, D(A))$ *egy erősen folytonos* izometriacsoportot *generál;*

(ii) $(A, D(A))$ *zárt, sűrűn definiált, minden* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *esetén* $\lambda \in \rho(A)$ *és*

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1; \tag{2.28}$$

(iii) $(A, D(A))$ *zárt, sűrűn definiált, minden* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R}$ *esetén* $\lambda \in \rho(A)$ *és*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}. \tag{2.29}$$

Ezek után megfogalmazzuk a tetszőleges erősen folytonos félcsoport generátorának karakterizációjáról szóló tételt. Ebben a rezolvens *minden* hatványára vonatkozó becslést kell feltennünk.

2.33. Tétel (Feller, Miyadera, Phillips, 1952)**.** *Legyen* $(A, D(A))$ *lineáris operátor az* X *Banach-téren,* $w \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$. *Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $(A, D(A))$ *egy* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoportot generál, melyre*

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq 0; \tag{2.30}$$

(ii) $(A, D(A))$ *zárt, sűrűn definiált, minden* $\lambda > w$ *esetén* $\lambda \in \rho(A)$ *és*

$$\|[(\lambda - w)R(\lambda, A)]^n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{2.31}$$

(iii) $(A, D(A))$ *zárt, sűrűn definiált, minden* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > w$ *esetén* $\lambda \in \rho(A)$ *és*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \le \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - w)^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.32}$$

Bizonyítás. Az $(i) \Rightarrow (iii)$ irány a 2.19. Következmény alapján adódik, a $(iii) \Rightarrow (ii)$ pedig triviális. Így csak a $(ii) \Rightarrow (i)$ irányt kell igazolnunk. A 2.2.1. alpontban látott átskálázási technikát felhasználva feltehetjük, hogy $w = 0$, vagyis

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n\| \le M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tetszőleges $\mu > 0$ esetén definiáljunk X-en egy új normát mint

$$\|x\|_\mu := \sup_{n \ge 0} \|\mu^n R(\mu, A)^n x\|.$$

Ezen normákra az alábbiak teljesülnek:

(a) $\|x\| \le \|x\|_\mu \le M\|x\|$, vagyis ekvivalensek $\|\cdot\|$-val;

(b) $\|\mu R(\mu, A)\|_\mu \le 1$;

(c) $\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \le 1$, ha $0 < \lambda \le \mu$;

(d) $\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \le \|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\|_\mu \le \|x\|_\mu$, ha $0 < \lambda \le \mu$, $n \in \mathbb{N}$;

(e) $\|x\|_\lambda \le \|x\|_\mu$, $0 < \lambda \le \mu$.

Csak a (c) pontot bizonyítjuk. Legyen $y = R(\lambda, A)x$. Ekkor az ún. rezolvensegyenlőség miatt (ld. (4.3))

$$y = R(\mu, A)x + (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A)x = R(\mu, A)\left(x + (\mu - \lambda)y\right).$$

Ebből (b) alapján adódik, hogy

$$\|y\|_\mu \le \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \frac{\mu - \lambda}{\mu}\|y\|_\mu,$$

tehát

$$\lambda\|y\|_\mu \le \|x\|_\mu.$$

Ezen tulajdonságokat felhasználva definiálhatunk egy újabb normát mint

$$\|\|x\|\| := \sup_{\mu>0} \|x\|_\mu, \tag{2.33}$$

melyre teljesülnek az alábbiak:

(f) $\|x\| \leq \|\|x\|\| \leq M\|x\|$;

(g) $\|\|\lambda R(\lambda, A)\|\| \leq 1$ minden $\lambda > 0$-ra.

Tehát az $(A, D(A))$ operátor teljesíti a (2.20) feltételt az eredetivel ekvivalens $\|\|\cdot\|\|$ normára, így a 2.30. Hille–Yosida-tétel miatt egy $\|\|\cdot\|\|$-kontraktív $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoportot generál X-en. Felhasználva (f)-et, $\|T(t)\| \leq M$ teljesül. $\square$

Végül nézzük meg, mit mondhatunk az erősen folytonos csoportok generálásáról.

2.34. Definíció. A $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ erősen folytonos *csoport generátora* az az $A : D(A) \subset X \to X$ operátor, melyre

$$Ax := \lim_{h\to 0} \frac{T(h)x - x}{h},$$

minden $x \in D(A)$ esetén, ahol

$$D(A) = \Big\{x \in X : \lim_{h\to 0} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ létezik}\Big\}.$$

Ha adva van egy $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ erősen folytonos csoport, melynek generátora $(A, D(A))$, akkor definiálhatjuk a $T_+(t) := T(t)$, $t \geq 0$ és a $T_-(t) := T(-t)$, $t \geq 0$ operátorcsaládokat, melyekről könnyen látható, hogy erősen folytonos félcsoportokat alkotnak. A definícióból adódik, hogy $(T_+(t))_{t\geq 0}$ generátora $(A, D(A))$, $(T_-(t))_{t\geq 0}$ generátora pedig $(-A, D(A))$. Tehát, ha A egy csoport generátora, akkor A és $-A$ is generátor. A következő állítás azt mondja ki, hogy ennek a megfordítása is igaz.

2.35. Tétel (Csoportok generálása)**.** *Legyen $(A, D(A))$ lineáris operátor az X Banach-téren, $w \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $(A, D(A))$ egy $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ erősen folytonos csoport*ot generál, melyre*

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{w|t|}, \quad t \in \mathbb{R};$$

(ii) $(A, D(A))$ *és* $(-A, D(A))$ *az erősen folytonos* $(T_+(t))_{t\geq 0}$ *ill.* $(T_-(t))_{t\geq 0}$ *félcsoport generátora, melyekre*

$$\|T_+(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt}, \quad \|T_-(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt},\ t \geq 0;$$

(iii) $(A, D(A))$ *zárt, sűrűn definiált, minden* $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| > w$ *esetén* $\lambda \in \rho(A)$ *és*

$$\|[(|\lambda| - w)R(\lambda, A)]^n\| \leq M, \quad n \in \mathbb{N};$$

(iv) $(A, D(A))$ *zárt, sűrűn definiált, minden* $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re}\lambda| > w$ *esetén* $\lambda \in \rho(A)$ *és*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(|\operatorname{Re}\lambda| - w)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bizonyítás. Nem részletezzük, következik a 2.30. Hille–Yosida és a 2.33. Feller–Miyadera–Phillips-tételekből. □

2.36. Állítás. *Legyen* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport az* X *Banach-téren. Ha létezik olyan* $t_0 > 0$*, melyre* $T(t_0)$ *invertálható, akkor* $(T(t))_{t\geq 0}$ *beágyazható egy* $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *erősen folytonos csoportba* X*-en.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a feltételből következik, hogy a $T(t)$ operátorok minden $t \geq 0$ esetén invertálhatók. Ha $t \in [0, t_0]$, akkor

$$T(t_0) = T(t_0 - t)T(t) = T(t)T(t_0 - t).$$

Mivel $T(t_0)$ bijektív, ezért $T(t)$ is az kell legyen. Ha $t > t_0$, akkor írjuk fel t-t $t = nt_0 + s$ alakban, ahol $s \in [0, t_0)$. Ekkor

$$T(t) = T(nt_0 + s) = T(t_0)^n T(s),$$

tehát $T(t)$ invertálható operátorok szorzata, így invertálható. Ezután terjesszük ki a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoportot $\mathbb{R}$-re a

$$T(t) := T(-t)^{-1}, \quad t \leq 0$$

definícióval. Így egy $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ csoportot kapunk, amely erősen folytonos, hiszen a pozitív t-kre az. □

2.3.2. Disszipatív operátorok és kontrakciófélcsoportok

Ha egy $(A, D(A))$ lineáris operátorról el akarjuk dönteni, hogy egy (kontrakció-félcsoport) generátora-e, a 2.30 Hille–Yosida- (ill. a 2.33 Feller–Miyadera–Phillips-) tétel feltételeinek ellenőrzéséhez szükségünk van a rezolvens ismeretére. Ebben a fejezetben lineáris operátorok egy olyan típusával ismerkedünk meg, melyek esetében a rezolvens ismerete nélkül igazolható a generátor-tulajdonság.

2.37. Definíció. Az $(A, D(A))$ lineáris operátort az X Banach-téren *disszipatív*nak mondunk, ha

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\| \tag{2.34}$$

minden $\lambda > 0$, $x \in D(A)$ esetén.

A 2.40. Állításban a disszipatív operátorok fontos tulajdonságait igazoljuk. Ehhez szükségünk lesz az operátor lezártjának fogalmára.

2.38. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $(B, D(B))$ operátor az $(A, D(A))$ operátor *kiterjesztése*, jelölésben $A \subset B$, ha $D(A) \subset D(B)$ és $Bx = Ax$ minden $x \in D(A)$ esetén. Az A legszűkebb zárt kiterjesztését – ha ilyen létezik – az A operátor *lezártjá*nak nevezzük, és $\overline{A}$-al jelöljük. Ha egy operátornak létezik lezártja, akkor *lezárható*nak mondjuk.

A következő állítás könnyen meggondolható a definíciókból.

2.39. Állítás. *Az $(A, D(A))$ operátor pontosan akkor lezárható, ha minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$, $x_n \to 0$ sorozat esetén, amelyre $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens,* $\lim Ax_n = 0$ *teljesül. Ekkor*

$$\mathcal{G}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{G}(A)},$$

ahol $\mathcal{G}$ az adott operátor gráfját jelöli.

2.40. Állítás. *Legyen $(A, D(A))$ disszipatív operátor. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

(a) $\lambda - A$ injektív minden $\lambda > 0$ esetén, és

$$\|(\lambda - A)^{-1}z\| \leq \frac{1}{\lambda}\|z\|,$$

ha $z \in \operatorname{ran}(\lambda - A) := (\lambda - A)D(A)$.

(b) $\lambda - A$ *pontosan akkor szürjektív valamely* $\lambda > 0$ *esetén, ha minden* $\lambda > 0$ *esetén szürjektív. Ilyenkor* $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

(c) A *pontosan akkor zárt, ha* $\operatorname{ran}(\lambda - A)$ *zárt valamely (azaz összes)* $\lambda > 0$ *esetén.*

(d) Ha $\operatorname{ran}(A) \subset \overline{D(A)}$*, pl. ha* A *sűrűn definiált, akkor* A *lezárható. A lezártja,* $\overline{A}$ *szintén disszipatív és* $\operatorname{ran}(\lambda - \overline{A}) = \overline{\operatorname{ran}(\lambda - A)}$, $\lambda > 0$.

Bizonyítás.

(a) A (2.34) becslés átfogalmazása.

(b) Tegyük fel, hogy $\lambda_0 - A$ szürjektív valamely $\lambda_0 > 0$ esetén. Ekkor $\lambda_0 \in \rho(A)$ és $\|R(\lambda_0, A)\| \leq 1/\lambda_0$. A rezolvens (2.17) hatványsor-alakjának tulajdonságai alapján ekkor $(0, 2\lambda_0) \subset \rho(A)$ is teljesül, és A disszipativitása miatt

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda},$$

ha $0 < \lambda < 2\lambda_0$. Folytatva az eljárást kapjuk, hogy $\lambda - A$ szürjektív minden $\lambda > 0$ esetén, így $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

(c) Az A operátor pontosan akkor zárt, ha $\lambda - A$ zárt valamely (tehát minden) $\lambda > 0$ esetén. Ez pedig ekvivalens azzal, hogy

$$(\lambda - A)^{-1} : \operatorname{ran}(\lambda - A) \to D(A)$$

zárt. Az (a) pont alapján a fenti operátor korlátos. A 2.8. Zártgráf-tétel miatt ez ekvivalens azzal, hogy $D((\lambda - A)^{-1}) = \operatorname{ran}(\lambda - A)$ zárt.

(d) Legyen $(x_n) \subset D(A)$ olyan sorozat, melyre $x_n \to 0$ és $Ax_n \to y$. Be kell látnunk, hogy $y = 0$. A (2.34) egyenlőtlenség alapján

$$\|\lambda(\lambda - A)x_n + (\lambda - A)w\| \geq \lambda\|\lambda x_n + w\|$$

minden $w \in D(A)$ és minden $\lambda > 0$ esetén. Ha $n \to \infty$, akkor

$$\| - \lambda y + (\lambda - A)w\| \geq \lambda\|w\|, \text{ tehát } \| - y + w - \frac{1}{\lambda}Aw\| \geq \|w\|.$$

Ha most $\lambda \to \infty$, akkor kapjuk, hogy

$$\|-y+w\| \geq \|w\|.$$

Mivel $y \in \overline{\mathrm{ran}(A)} \subset \overline{D(A)}$ a feltétel szerint, ezért w-t tetszőlegesen közel választhatjuk y-hoz, amiből

$$0 \geq \|y\|,$$

tehát $y = 0$.
Igazolandó, hogy $\overline{A}$ is disszipatív, legyen $x \in D(\overline{A})$ tetszőleges. Az $\overline{A}$ definíciója miatt létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ sorozat, melyre $x_n \to x$, $Ax_n \to \overline{A}x$. Mivel A disszipatív és a norma folytonos leképezés, ezért $\|(\lambda - \overline{A})x\| \geq \lambda\|x\|$ minden $\lambda > 0$ esetén. Tehát $\overline{A}$ is disszipatív. Végül, vegyük észre, hogy $\mathrm{ran}(\lambda - A)$ sűrű $\mathrm{ran}(\lambda - \overline{A})$-ban. A 3. pont alapján $\mathrm{ran}(\lambda - \overline{A})$ zárt X-ben, így $\mathrm{ran}\,(\lambda - \overline{A}) = \overline{\mathrm{ran}(\lambda - A)}$ következik. □

A 2.30. Hille–Yosida-tétel feltételei között szereplő (2.20) rezolvensbecslésből következik, hogy A teljesíti a (2.34) tulajdonságot, tehát disszipatív. Az alábbi tétel arról szól, hogy sűrűn definiált, disszipatív operátorok lezártja mikor lesz generátor.

2.41. Tétel (Lumer, Phillips, 1961)**.** *Legyen $(A, D(A))$ sűrűn definiált, disszipatív operátor az X Banach-téren. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) Az $\overline{A}$ lezárt operátor egy kontrakció-félcsoport generátora X-en;

(ii) $\mathrm{ran}(\lambda - A)$ sűrű X-ben valamely (tehát minden) $\lambda > 0$ esetén.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: A 2.30. Hille–Yosida-tétel alapján $\mathrm{ran}(\lambda - \overline{A}) = X$ minden $\lambda > 0$ esetén. A 2.40. Állítás (d) pontjából pedig következik, hogy $\mathrm{ran}\,(\lambda - \overline{A}) = \overline{\mathrm{ran}(\lambda - A)} = X$, tehát (ii) teljesül.
$(ii) \Rightarrow (i)$: $\mathrm{ran}(\lambda - A)$ sűrűségéből a 2.40. Állítás (d) pontja alapján adódik, hogy $\lambda - \overline{A}$ szürjektív minden $\lambda > 0$ esetén. A 2.40. Állítás (b) pontja szerint $(0, \infty) \subset \rho(\overline{A})$, és $\overline{A}$ disszipativitása miatt

$$\|R(\lambda, \overline{A})\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Tehát a 2.30. Hille–Yosida-tételből következik, hogy $\overline{A}$ egy kontrakció-félcsoport generátora X-en. □

Még egyszerűbb feltételt kapunk Hilbert-terekben.

2.42. Következmény. *Legyen $(A, D(A))$ sűrűn definiált operátor a H Hilbert-téren. Ha A és A^* is disszipatív, akkor $\overline{A}$ kontrakció-félcsoportot generál H-n.*

Bizonyítás. A 2.41. Lumer–Phillips-tétel alapján elég megmutatni, hogy $\operatorname{ran}(\mathrm{Id} - A)$ sűrű. Indirekt, tegyük fel, hogy $\overline{\operatorname{ran}(\mathrm{Id} - A)} \neq H$. Ekkor a Riesz-tétel alapján létezik $y \neq 0$, melyre

$$\langle (\mathrm{Id} - A)x, y\rangle = 0, \quad x \in D(A).$$

Ezért $y \in D(A^*)$ és

$$\langle x, (\mathrm{Id} - A^*)y\rangle = 0, \quad x \in D(A).$$

Mivel $D(A)$ sűrű H-ban, ezért $(\mathrm{Id} - A^*)y = 0$, ami ellentmond a 2.40. Állítás (a) pontjának. □

A fenti következmény feltételei teljesülnek például akkor, ha $(A, D(A))$ disszipatív és önadjungált. Ekkor A generátor, ugyanis zárt is (az adjungált operátor mindig zárt).
Az alábbiakban a disszipativitásnak egy olyan karakterizációját adjuk, amely konkrét példákban (pl. $C_0(\Omega)$, $L^p(\Omega)$, Hilbert-tér) nagyban megkönnyíti annak eldöntését, hogy egy adott operátor disszipatív-e. Ehhez először bevezetjük a dualitási halmaz fogalmát.
Legyen X Banach-tér, X^* a duális tere. A Hahn–Banach-tétel miatt minden $x \in X$ esetén létezik olyan $\varphi_x \in X^*$ funkcionál, melyre

$$\varphi_x(x) = \|x\|^2 = \|\varphi_x\|^2.$$

Rögzített $x \in X$ esetén legyen az x *dualitási halmaza*

$$\mathcal{J}(x) := \left\{\varphi \in X^* : \varphi(x) = \|x\|^2 = \|\varphi\|^2\right\}. \tag{2.35}$$

2.43. Állítás. *Az $(A, D(A))$ operátor pontosan akkor disszipatív, ha minden $x \in D(A)$ esetén létezik $\varphi_x \in \mathcal{J}(x)$, amelyre*

$$\operatorname{Re}(\varphi_x(Ax)) \leq 0. \tag{2.36}$$

Továbbá, ha $(A, D(A))$ egy kontrakció-félcsoport generátora X-en, akkor (2.36) teljesül minden $x \in D(A)$ és minden $\varphi \in \mathcal{J}(x)$ esetén.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (2.36) teljesül minden $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$ esetén valamely $\varphi_x \in \mathcal{J}(x)$ lineáris funkcionálra. Ekkor

$$\varphi_x(x) = \|\varphi_x\|^2 = 1,$$

és minden $\lambda > 0$ esetén

$$\|\lambda x - Ax\| \geq |\varphi_x(\lambda x - Ax)| \geq \operatorname{Re}\varphi_x(\lambda x - Ax) \geq \operatorname{Re}\varphi_x(\lambda x) = \lambda\|x\|^2 = \lambda.$$

Tehát A disszipatív.
Megfordítva, legyen $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$ tetszőleges, és tegyük fel, hogy $\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda$ minden $\lambda > 0$ esetén. Válasszunk minden $\lambda > 0$ számhoz egy $\psi_\lambda \in \mathcal{J}(\lambda x - Ax)$ elemet, és tekintsük a

$$\zeta_\lambda := \frac{\psi_\lambda}{\|\psi_\lambda\|}, \quad \lambda > 0$$

lenormált funkcionálokat. Ekkor minden $\lambda > 0$ esetén

$$\begin{aligned} \lambda \leq \|\lambda x - Ax\| &= \zeta_\lambda(\lambda x - Ax) \\ &= \lambda \operatorname{Re}\zeta_\lambda(x) - \operatorname{Re}\zeta_\lambda(Ax) \\ &\leq \min\{\lambda - \operatorname{Re}\zeta_\lambda(Ax), \lambda \operatorname{Re}\zeta_\lambda(x) + \|Ax\|\}. \end{aligned}$$

Ebből

$$\operatorname{Re}\zeta_\lambda(Ax) \leq 0 \text{ és } 1 - \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \leq \operatorname{Re}\zeta_\lambda(x).$$

Legyen ζ az $\{\zeta_\lambda : \lambda > 0\}$ funkcionálcsalád egy torlódási pontja a gyenge-* topológiában. Ekkor

$$\|\zeta\| \leq 1, \quad \operatorname{Re}\zeta(Ax) \leq 0, \quad \operatorname{Re}\zeta(x) \geq 1.$$

Ezek alapján $\zeta \in \mathcal{J}(x)$ teljesül, és kielégíti a (2.36) egyenlőtlenséget.
Végül, tegyük fel, hogy A egy $(T(t))_{t\geq 0}$ kontrakció-félcsoportot generál X-en. Ekkor minden $x \in D(A)$ vektorra és $\varphi_x \in \mathcal{J}(x)$ funkcionálra

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\varphi_x(Ax)) &= \lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{\operatorname{Re}(\varphi_x(T(h)x))}{h} - \frac{\operatorname{Re}(\varphi_x(x))}{h}\right) \\ &\leq \overline{\lim_{h\downarrow 0}}\left(\frac{\|T(h)x\| \cdot \|\varphi_x\|}{h} - \frac{\|x\|^2}{h}\right) \leq 0, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\|\varphi_x\| = \|x\|$ és $\|T(h)\| \leq 1$. Ebből az állítás következik. $\square$

2.44. Példa.

1. Legyen $X = H$ Hilbert-tér. Ekkor $\mathcal{J}(x) = \{x\}$. Ilyenkor az A operátor pontosan akkor disszipatív, ha
$$\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \le 0, \quad x \in D(A).$$

2. Legyen $X = C_0(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ha $0 \ne f \in X$, akkor a $\mathcal{J}(f) \subset X^*$ azon pontmértékek számszorosaiból áll, melyek tartója azon $s_0 \in \Omega$ pontok, ahol f eléri a maximumát. Precízebben,
$$\left\{\overline{f(s_0)} \cdot \delta_{s_0} : s_0 \in \Omega \text{ és } |f(s_0)| = \|f\|_\infty\right\} = \mathcal{J}(f).$$

3. Legyen $X = L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, $0 \ne f \in X$. Ekkor
$$\varphi \in \mathcal{J}(f) \subset L^q(\Omega, \mu) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$
ahol
$$\varphi(s) := \begin{cases} \overline{f(s)} \cdot |f(s)|^{p-2} \cdot \|f\|_p^{2-p}, & \text{ha } f(s) \ne 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$
Megjegyezzük, hogy a reflexív L^p-tereken – mint minden olyan Banach-téren, amelynek a duálisa szigorúan konvex – $\mathcal{J}(f)$ egyelemű. Tehát, ha $1 < p < \infty$, akkor $\mathcal{J}(f) = \{\varphi\}$. Míg ha $p = 1$, akkor $\mathcal{J}(f)$-nek minden olyan $\varphi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ eleme, amelyre
$$\|\varphi\|_\infty \le \|f\|_1, \text{ és } \varphi(s) \cdot |f(s)| = \overline{f(s)} \cdot \|f\|_1, \text{ha } f(s) \ne 0.$$

2.45. Állítás. *Legyen $(A, D(A))$ egy önadjungált operátor a H Hilbert-téren. Ekkor A pontosan akkor lesz egy erősen folytonos (önadjungált operátorokból álló) félcsoport generátora, ha A felülről korlátos, vagyis létezik olyan $w \in \mathbb{R}$, amelyre*
$$\langle Ax, x\rangle \le w\|x\|^2, \quad x \in D(A).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A felülről korlátos $w \in \mathbb{R}$ felső korláttal. Ekkor $A - w = A^* - w$ disszipatív (ld. a 2.44. Példa 1. pontját). Így a 2.42. Következmény szerint $A - w$ egy kontrakció-félcsoport generátora, tehát A generátor.

Megfordítva, ha $A = A^*$ generátor, akkor az általa generált $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoporthoz léteznek olyan $M \geq 1$, $w \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt}.$$

Ekkor $A - w = A^* - w$ egy M korláttal rendelkező korlátos félcsoport önadjungált generátora. Tegyük fel ezért a továbbiakban az egyszerűség kedvéért, hogy A egy M korlátú félcsoport önadjungált generátora, és azt fogjuk belátni, hogy ekkor A disszipatív is. Tekintsük most a 2.30. Hille–Yosida-tétel bizonyításában bevezetett

$$A_n := nAR(n, A) = n^2R(n, A) - n\,\mathrm{Id}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

korlátos operátorokat, és az általuk generált

$$T_n(t) := \mathrm{e}^{tA_n}, \quad t \geq 0$$

egyenletesen folytonos félcsoportokat. A 2.33. Feller–Miyadera–Phillips-tétel szerint minden $\lambda > 0$ esetén

$$\|[\lambda R(\lambda, A)]^k\| \leq M, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Így

$$\begin{aligned}\|T_n(t)\| = \|\mathrm{e}^{tA_n}\| = \|\mathrm{e}^{tn^2R(n,A)} \cdot \mathrm{e}^{-tn}\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k n^k [nR(n, A)]^k}{k!} \right\| \cdot \mathrm{e}^{-tn} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k n^k \|[nR(n, A)]^k\|}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-tn} \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k n^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-tn} = M \cdot \mathrm{e}^{tn} \cdot \mathrm{e}^{-tn} = M.\end{aligned}$$

Tehát $\|T_n(t)\| \leq M$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \geq 0$ esetén. Mivel A kielégíti a 2.29. Lemma feltételeit $w = 0$-ra, ezért az (A_n) operátorsorozat pontonként tart A-hoz $D(A)$-n, ha $n \to \infty$. Így a 2.30. Tétel bizonyításának menetét követve kapjuk, hogy $(T_n(t))$ is konvergens minden t-re pontonként X-en (az egyenletes korlátosság miatt), és a határértéke éppen az A által generált félcsoport megfelelő $T(t)$ eleme. Mivel A önadjungált, ezért $R(n, A)$ és ezzel együtt A_n is önadjungált minden n-re. Ebből következik, hogy $T_n(t)$ is önadjungált minden n-re és $t \geq 0$-ra, ezért a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport is önadjungált. Feltehető, hogy $\omega_0 = 0$ is teljesül (a feltételek szerint $\omega_0 \leq 0$, és ha $\omega_0 < 0$ volna, akkor toljuk el A-t ω_0-al). A 4.18. Állítás szerint ekkor $r(T(t)) = 1$ minden t-re, és mivel $\|T(t)\| = r(T(t))$ az önadjungáltság miatt, ezért $\|T(t)\| = 1$. Tehát $(T(t))_{t\geq 0}$ kontrakció-félcsoport, és így ismét a 2.30. Tétel alapján A disszipatív. □

2.46. Példa (Elsőrendű differenciáloperátorok)**.** Legyen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható vektormező, melyre

$$\sup_{s\in\mathbb{R}^n} \|F'(s)\| < \infty,$$

ahol a norma tetszőleges vektornorma $\mathbb{R}^n$-en. Ekkor az F-hez tartozó elsőrendű differenciáloperátor $C_0(\mathbb{R}^n)$-en

$$Af(s) := \langle \operatorname{grad} f(s), F(s)\rangle = \sum_{k=1}^{n} F_k(s)\frac{\partial f}{\partial s_k}(s),$$

ahol $D(A) = C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Mivel

$$\frac{\partial f}{\partial s_i}(s_0) = 0,$$

ha $|f(s_0)| = \|f\|$, azonnal adódik, hogy A disszipatív. $\overline{A}$ pedig a következő félcsoportot generálja. Mivel F globálisan Lipschitz, ezért létezik olyan $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonos dinamikai rendszer, melyre $\Phi(t + r, s) = \Phi(t, \Phi(r, s))$, $\Phi(0, s) = s$, és

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, s) = F(\Phi(t, s)),$$

minden $t, r \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

$$(T(t)f)(s) := f(\Phi(t, s)),$$

$f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$ a Φ dinamikai rendszer által indukált erősen folytonos csoport $C_0(\mathbb{R}^n)$-en.

2.47. Állítás. *A $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ csoport generátora $C_0(\mathbb{R}^n)$-en a fenti $(A, D(A))$ operátor lezártja.*

Bizonyítás. Jelölje $(B, D(B))$ a $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ csoport generátorát. Legyen $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, és tekintsük a $g := f - Af = (\mathrm{Id} - A)f$ függvényt! Ekkor a rezolvens (2.13) integrálreprezentációja alapján

$$\begin{aligned} R(1, B)g(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} f(\Phi(t, s))\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\langle \operatorname{grad} f(\Phi(t, s)), F(\Phi(t, s))\rangle\,\mathrm{d}s \\ &= f(s), \end{aligned}$$

ahol parciálisan integráltunk. Tehát $C_c^1(\mathbb{R}^n) \subset D(B)$ és $A \subset B$. Másrészt, $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ sűrű $C_0(\mathbb{R}^n)$-ben és invariáns a $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ csoportra nézve. Tehát $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ lényeges része B-nek, így az állítást beláttuk. □

2.48. Példa (Delay (késleltetett) differenciáloperátor)**.** Legyen $X := C[-1,0]$,

$$Af := f'$$
$$D(A) := \Big\{ f \in C^1[-1,0] : f'(0) = Lf \Big\},$$

ahol L egy adott folytonos lineáris funkcionál $C[-1,0]$-n. Ekkor

$$D(A) = \ker \varphi$$

alakban is írható, ahol

$$\varphi(f) := f'(0) - Lf \in \mathbb{C}, \quad f \in C^1[-1,0]$$

lineáris funkcionál. Mivel φ korlátos $C^1[-1,0]$-en, de nem korlátos a szupremum-normában, ezért kapjuk, hogy $D(A)$ sűrű $C[-1,0]$-ben és zárt $C^1[-1,0]$-ben. Megmutatjuk, hogy az $A - \|L\| \cdot \mathrm{Id}$ átskálázott operátor disszipatív. Legyen $f \in D(A)$. A 2.44.2. Példa alapján a $\mathcal{J}(f)$ halmaz olyan $\overline{f(s_0)}\delta_{s_0}$ lineáris formákat tartalmaz, amelyekre $|f(s_0)| = \|f\|$ valamely $s_0 \in [-1,0]$ esetén. Tehát $A - \|L\| \cdot \mathrm{Id}$ disszipativitásához az szükséges, hogy

$$\operatorname{Re} \overline{f(s_0)}\delta_{s_0}(f' - \|L\| f) \le 0, \text{ vagyis } \operatorname{Re} \overline{f(s_0)} f'(s_0) \le \|L\| \|f\|^2.$$

Ha $-1 < s_0 < 0$, akkor $f'(s_0) = 0$, így a kívánt egyenlőtlenség teljesül. Ha $s_0 = -1$, akkor

$$2 \operatorname{Re} \overline{f(-1)} f'(-1) = (f \cdot \overline{f})'(-1) \le 0.$$

Legyen most $s_0 = 0$. Mivel a feltétel szerint $f'(0) = Lf$, ezért

$$\operatorname{Re} \overline{f(0)} f'(0) = \operatorname{Re} \overline{f(0)} Lf \le \|f\| \cdot \|L\| \cdot \|f\|.$$

2.49. Állítás. *Legyen $L \in C[-1,0]^*$. Ekkor a fenti $(A, D(A))$ operátor egy $(T(t))_{t \ge 0}$ félcsoport generátora, melyre*

$$\|T(t)\| \le \mathrm{e}^{\|L\| t}, \quad t \ge 0.$$

Bizonyítás. Az előbbi meggondolás alapján $A - \|L\| \cdot \mathrm{Id}$ disszipatív. A 2.41. Lumer–Phillips-tétel alapján azt kell megmutatni, hogy $\lambda - A$ szürjektív valamely $\lambda > \|L\|$ számra. Legyen $g \in C[-1,0]$ tetszőleges. Keresünk olyan $f \in C^1[-1,0]$ függvényt, amelyre

$$\lambda f - f' = g \text{ és } f'(0) = Lf, \text{ azaz } f \in D(A).$$

Az első egyenletből

$$\begin{aligned} f(s) &:= c\,\mathrm{e}^{\lambda s} - \int_0^s \mathrm{e}^{\lambda(s-\tau)} g(\tau)\,d\tau \\ &=: c\,\varepsilon_\lambda(s) - h(s), \quad s \in [-1,0] \end{aligned}$$

megoldás minden $c \in \mathbb{C}$ konstansra. Ha $\lambda > \|L\|$, akkor ezt a konstanst megválaszthatjuk mint

$$c := \frac{g(0) - Lh}{\lambda - L\varepsilon_\lambda},$$

és így $f \in D(A)$ teljesül. $\square$

2.50. Példa (Másodrendű differenciáloperátorok)**.**

1. Legyen $X := C[0,1]$, és tekintsük az

$$Af := f'', \quad D(A) := \Big\{ f \in C^2[0,1] : f'(0) = f'(1) = 0 \Big\}$$

operátort, melyet a 2.27. Állításban már vizsgáltunk. Most ahelyett, hogy felírnánk az általa generált félcsoportot, a 2.41. Lumer–Phillips-tétel feltételeit ellenőrizzük. Könnyen látható, hogy $(A, D(A))$ sűrűn definiált és zárt. A disszipativitás igazolásához legyen $f \in D(A)$, $s_0 \in [0,1]$, melyre $|f(s_0)| = \|f\|$. Ekkor

$$\overline{f(s_0)} \cdot \delta_{s_0} \in \mathcal{J}(f).$$

Mivel a $t \mapsto \operatorname{Re} \overline{f(s_0)} \cdot f(t)$ függvénynek s_0-ban maximuma van, ezért ha $s_0 \in (0,1)$, akkor

$$\operatorname{Re} \Big(\overline{f(s_0)} \cdot \delta_{s_0}(f'') \Big) = \Big(\operatorname{Re} \overline{f(s_0)} f \Big)'' (s_0) \le 0.$$

Ha csak $s_0 = 0$ vagy $s_0 = 1$ választható, akkor az állítás szintén teljesül az $f'(0) = f'(1) = 0$ peremfeltételek miatt.

Végül megmutatjuk, hogy $\lambda^2 - A$ szürjektív, ha $\lambda > 0$. Legyen $g \in C[0,1]$, és definiáljuk

$$k(s) := \frac{1}{2\lambda} \left[\mathrm{e}^{\lambda s} \int_s^1 \mathrm{e}^{-\lambda\tau} g(\tau)\,d\tau - \mathrm{e}^{-\lambda s} \int_s^1 \mathrm{e}^{\lambda\tau} g(\tau)\,d\tau \right],$$

$s \in [0,1]$. Ekkor $k \in C^2[0,1]$ és

$$\lambda^2 k - k'' = g.$$

Másrészt, minden $a, b \in \mathbb{C}$ esetén a

$$h_{a,b}(s) := a\mathrm{e}^{\lambda s} + b\mathrm{e}^{-\lambda s}, \quad s \in [0,1]$$

függvényre

$$\lambda^2 h_{a,b} - h''_{a,b} = 0.$$

Így meghatározhatók olyan a, b konstansok, melyekre $f := k + h_{a,b}$ esetén

$$\lambda^2 f - f'' = g \text{ és } f'(0) = f'(1) = 0.$$

Ekkor $f \in D(A)$ és $\lambda^2 f - f'' = g$, tehát $\lambda^2 - A$ szürjektív. Ezért a 2.41. Tétel miatt $(A, D(A))$ egy kontrakciófélcsoportt generál $C[0,1]$-en.

2. Legyen most $X = L^2[0,1]$,

$$Af := f'', \quad D(A) := \left\{ f \in C^2[0,1] : f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$

Ekkor $D(A)$ sűrű X-ben, és $f \in D(A)$ esetén

$$\langle Af, f \rangle = \int_0^1 f'' \overline{f} = [f'\overline{f}]_0^1 - \int_0^1 f' \overline{f'} \le 0.$$

Így A disszipatív az $L^2[0,1]$ Hilbert-téren. Mint az előző példában, adott $g \in C^2[0,1]$ függvény esetén megadható olyan $f \in C^2[0,1]$ függvény, melyre $f(0) = f(1) = 0$ és $\lambda^2 f - f'' = g$, tehát $\operatorname{ran}(\lambda^2 - A)$ sűrű. Ezért $(\overline{A}, D(\overline{A}))$ egy kontrakciófélcsoportot generál $L^2[0,1]$-en.

2.4. Evolúciós egyenletek

Most azzal foglalkozunk, ami valójában a vizsgálódásaink kiindulópontja volt: differenciálegyenletek megoldásával.

2.51. Definíció. Az alábbi kezdetiérték-problémát *absztrakt* (vagyis Banach-tér-értékű) *Cauchy-problémá*nak hívjuk:

$$\text{(ACP)} \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) &= Au(t), \quad t \ge 0; \\ u(0) &= x, \end{cases}$$

ahol $(A, D(A))$ lineáris operátor X-en, $x \in X$.

Az $u : \mathbb{R}_+ \to X$ az (ACP) *(klasszikus) megoldása*, ha u folytonosan differenciálható t szerint $\mathbb{R}_+$-n, $u(t) \in D(A)$, $t \ge 0$ és u kielégíti (ACP)-t.

Természetesen klasszikus megoldásról csak akkor beszélhetünk, ha $x \in D(A)$. A 2.4. Lemma (b) pontja alapján adódik az alábbi állítás.

2.52. Állítás. *Legyen $(A, D(A))$ a $(T(t))_{t \geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora. Ekkor minden $x \in D(A)$ esetén az*

$$u : t \mapsto u(t) := T(t)x$$

függvény az (ACP) egyetlen klasszikus megoldása.

Bizonyítás. A 2.4. Lemma (b) pontjában láttuk, hogy $x \in D(A)$ esetén $T(t)x \in D(A)$ és

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(t)x = AT(t)x,$$

tehát u valóban klasszikus megoldása (ACP)-nek. Az egyértelműséghez legyen $t > 0$ és $s \in (0, t)$. Ekkor

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} (T(t-s)u(s)) = T(t-s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u(s) - T(t-s)Au(s) = 0.$$

Tehát

$$u(t) = T(t)u(0) = T(t)x.$$

Mivel t tetszőleges volt, az egyértelműség adódik. $\square$

Ha $x \notin D(A)$, akkor is lehetséges az (ACP) ún. enyhe (mild) megoldásáról beszélni. Ilyenkor a megoldás differenciálhatóságát csak $t > 0$ esetén követeljük meg, vagy ott sem.

2.53. Definíció. Az $u : \mathbb{R}_+ \to X$ folytonos függvény az (ACP) *enyhe (mild) megoldása*, ha $\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s \in D(A)$, $t \geq 0$, és

$$u(t) = A \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s + x.$$

A 2.4. Lemma (d) pontjából ismét adódik, hogy ha A generátor, akkor minden $x \in X$ esetén a félcsoport enyhe megoldást ad.

2.54. Állítás. *Legyen $(A, D(A))$ a $(T(t))_{t \geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora. Ekkor minden $x \in X$ esetén az*

$$u : t \mapsto u(t) := T(t)x$$

(pálya)függvény az (ACP) egyetlen enyhe megoldása.

Bizonyítás. Elég az azonosan 0 megoldás egyértelműségét igazolni $x = 0$ esetén. Tegyük fel, hogy u enyhe megoldása (ACP)-nek és $x = 0$, legyen $t > 0$ tetszőleges. Ekkor minden $s \in (0, t)$ esetén

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T(t-s)\int_0^s u(r)\,dr\right) = T(t-s)u(s) - T(t-s)A\int_0^s u(r)\,dr = 0.$$

Ebből

$$\int_0^t u(r)\,dr = 0, \text{ tehát } u(t) = u(0) = 0.$$

□

A megoldás következő tulajdonsága karakterizálja az $(A, D(A))$ operátor generátor-tulajdonságát.

2.55. Definíció. Azt mondjuk, hogy (ACP) *korrekt kitűzésű (well-posed)*, ha

(a) $D(A)$ sűrű;

(b) minden $x \in D(A)$ esetén létezik egyértelmű $u(\cdot, x)$ klasszikus megoldása (ACP)-nek;

(c) minden $(x_n) \subset D(A)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ esetén $\lim_{n\to\infty} u(t, x_n) = 0$, ahol az utóbbi limesz $[0, t_0]$-on egyenletes (minden $t_0 > 0$-ra).

2.56. Tétel. *Legyen $A : D(A) \subset X \to X$ zárt operátor. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $(A, D(A))$ egy erősen folytonos félcsoport generátora;

(ii) Az $(A, D(A))$ operátorhoz tartozó (ACP) absztrakt Cauchy-probléma korrekt kitűzésű.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: A 2.52. Tételből és a félcsoportok tulajdonságaiból következik.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Adott $x \in D(A)$ esetén legyen

$$T(t)x := u(t, x)$$

az egyértelműen létező klasszikus megoldás. Az egyértelműség miatt $T(t)$ lineáris. Mivel $D(A)$ sűrű, és a feltétel szerint $T(t)$ korlátos, ezért $D(A)$-ról kiterjeszthető X-re korlátos módon. Megmutatjuk, hogy

$$\sup_{0\le t\le 1} \|T(t)\| < \infty.$$

Indirekt, tegyük fel, hogy létezik olyan $(t_n) \subset [0,1]$ sorozat, melyre $\|T(t_n)\| \to \infty$. Ekkor létezik olyan $(x_n) \subset D(A)$ sorozat, melyre $\|x_n\| \to 0$ és $\|T(t_n)x_n\| = \|u(t_n, x_n)\| \geq 1$, ami ellentmond (ii)-nek. Tehát $\|T(t)\|$ egyenletesen korlátos $[0,1]$-en. Mivel $t \mapsto T(t)x$ folytonos (sőt, folytonosan differenciálható) minden $x \in D(A)$ esetén, $D(A)$ sűrű, ezért az 1.52. Állítás (iii) pontja alapján minden $x \in X$ esetén folytonos.
A megoldás egyértelműségéből adódik, hogy minden $x \in D(A)$, $t, s \geq 0$ esetén

$$T(t+s)x = T(t)T(s)x.$$

Tehát, $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport X-en. Legyen a generátora $(B, D(B))$. Ekkor $A \subset B$. Mivel a feltétel szerint $D(A)$ invariáns $(T(t))_{t\geq 0}$-re nézve és sűrű, így lényeges része B-nek. Mivel A zárt, ezért $A = B$. $\square$

2.5. Félcsoportok típusai

Az alábbiakban a félcsoportok különböző regularitási tulajdonságaival ismerkedünk meg.

2.5.1. Analitikus félcsoportok

Elöljáróban definiáljuk a komplex számsík egy olyan részhalmazait, amelyeket szektornak fogunk nevezni.

2.57. Definíció. Legyen $0 < \delta \leq \pi/2$ adva. Ekkor a

$$\Sigma_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \delta\} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$$

halmaz neve δ *szögű szektor.*

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az olyan félcsoportok, amelyek a valós jobb félegyenes helyett egy (komplex) szektoron vannak értelmezve sok fontos tulajdonsággal rendelkeznek.

2.58. Definíció. A $(T(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}} \subset \mathscr{L}(X)$ operátorcsaládot *(δ szögű) analitikus félcsoport*nak nevezzük, ha

(a) $T(0) = \mathrm{Id}$, $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ minden $z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$ esetén;

(b) a $z \mapsto T(z)$ leképezés analitikus Σ_δ-ban;

(c) $\lim_{\Sigma_{\delta'} \ni z \to 0} T(z)x = x$ minden $x \in X$, $0 < \delta' < \delta$ esetén.

Ha továbbá

(d) $\|T(z)\|$ korlátos $\Sigma_{\delta'}$-ben minden $0 < \delta' < \delta$ esetén,

akkor $(T(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$-t *korlátos analitikus félcsoport*nak nevezzük.
Ha $(T(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$ egy (korlátos) analitikus félcsoport, akkor a $T(\cdot) : [0,\infty) \to \mathscr{L}(X)$ megszorításának generátorát az analitikus félcsoport *generátorá*nak nevezzük. Fordítva, ha $(A, D(A))$ egy olyan félcsoport generátora, amelynek létezik $(T(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$ analitikus kiterjesztése, akkor azt mondjuk, hogy az A által generált félcsoport analitikus.

2.59. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy ha $(T(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$ analitikus félcsoport, akkor a

$$T : (0,\infty) \to \mathscr{L}(X)$$

leképezés folytonos (sőt, differenciálható) $\mathscr{L}(X)$-ben az operátornormát véve. Ebből az is következik, hogy ha λ elég nagy, akkor a generátor rezolvensét a

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)\,\mathrm{d}t$$

improprius integrál állítja elő, ahol az integrál az operátornormában is konvergens.

Könnyen meggondolható az alábbi állítás.

2.60. Állítás. *Legyen $(A, D(A))$ sűrűn definiált lineáris operátor az X Banach-téren. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) Az A operátor egy analitikus félcsoportot generál;

(ii) Valamilyen $\omega > 0$ számra $A - \omega$ korlátos analitikus félcsoportot generál.

Bizonyítás. $(ii) \Rightarrow (i)$: Ha az $A-\omega$ generátor által generált korlátos analitikus félcsoport $(S(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$, akkor az $A = (A - \omega) + \omega$ által generált félcsoport

$$T(z) := \mathrm{e}^{\omega z} S(z), \quad z \in \Sigma_\delta \cup \{0\},$$

ami szintén analitikus.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Legyen $(T(z))_{z\in\Sigma_\delta\cup\{0\}}$ az A által generált analitikus félcsoport. Ekkor meggondolható, hogy minden $\delta' \in (0,\delta)$ esetén létezik olyan $\omega > 0$ és $M \geq 1$, hogy

$$\|T(z)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega \operatorname{Re} z}, \quad z \in \Sigma_{\delta'}.$$

Definiálja $S(z) := \mathrm{e}^{-\omega z}T(z)$, $z \in \Sigma_{\delta'}$. Ekkor $(S(z))_{z\in\Sigma_{\delta'}\cup\{0\}}$ korlátos analitikus félcsoport lesz, amelynek generátora $A - \omega$. □

A továbbiakban karakterizálni szeretnénk a (korlátos) analitikus félcsoportok generátorait. Ehhez szükségünk lesz a szektoriális operátor fogalmára.

2.61. Definíció. Legyen $(A, D(A))$ zárt, sűrűn definiált lineáris operátor az X Banach-téren. Azt mondjuk, hogy A *δ szögű szektoriális operátor*, ha létezik olyan $0 < \delta \leq {}^{\pi}\!/_{2}$ szám, amelyre

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta} \subset \rho(A),$$

és minden $\varepsilon \in (0,\delta)$ esetén létezik $M_\varepsilon \geq 1$, amelyre

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}, \quad 0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma}_{\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon} \tag{2.37}$$

(ld. a 2.2. ábrát).

Szektoriális operátorok exponenciálisát a Cauchy-integrálformulával definiálhatjuk.

2.62. Definíció. Legyen $(A, D(A))$ δ szögű szektoriális operátor. Legyen $T(0) := \mathrm{Id}$, és $z \in \Sigma_\delta$ esetén

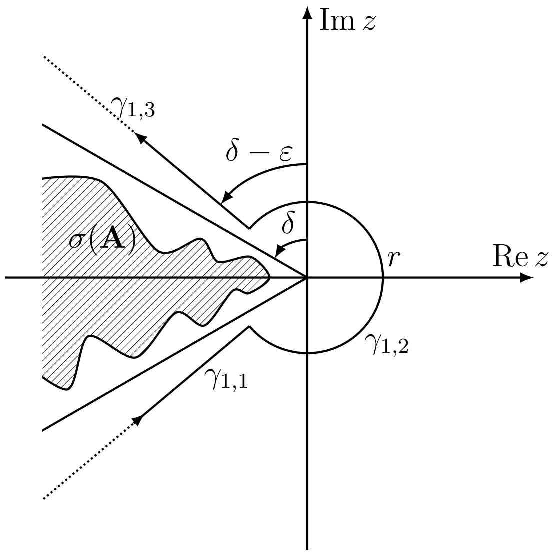
$$T(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \mathrm{e}^{\mu z} R(\mu, A)\, d\mu, \tag{2.38}$$

ahol γ tetszőleges szakaszonként sima görbe $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta}$-ban, amely valamely $\delta' \in (|\arg z|, \delta)$ esetén $\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta')}$-ből halad $\infty\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+\delta')}$-ig (ld. a 2.2. ábrát).

2.63. *Megjegyzés.* Ha $A \in \mathscr{L}(X)$, tehát $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ kompakt, akkor is definiálható

$$T(t) = \mathrm{e}^{tA} := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \mathrm{e}^{\mu t} R(\mu, A)\, d\mu, \quad t \in \mathbb{C},$$

ahol γ egy pozitív irányítású görbe, ami körüljárja $\sigma(A)$-t. Ekkor az így definiált félcsoport megegyezik az (1.5) exponenciális sor által definiálttal.



2.2. ábra. Analitikus félcsoportok generátorának spektruma

A következő állítás arról szól, hogy a (2.38) integrálformulával definiált operátorok korlátos analitikus félcsoportot alkotnak, amelynek generátora éppen A.

2.64. Állítás. *Legyen* $(A, D(A))$ δ *szögű szektoriális operátor. Ekkor a (2.38) képlettel definiált* $T(z)$, $z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}$ *operátorok* $\mathscr{L}(X)$*-ben vannak, és* δ *szögű korlátos analitikus félcsoportot alkotnak. Ennek a félcsoport a generátora az* $(A, D(A))$ *szektoriális operátor.*

Bizonyítás. Csak a generátortulajdonságot bizonyítjuk. Jelölje a (2.38) képlettel definiált $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport generátorát $(B, D(B))$. Az állítás első részéből következik, hogy a félcsoport korlátos, ezért $2 \in \rho(B)$ teljesül. Így elegendő megmutatni, hogy

$$R(2, A) = R(2, B).$$

A 2.17. Tétel szerint

$$R(2, B)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t} T(t)x \,\mathrm{d}t, \quad x \in X.$$

Legyen $t_0 > 0$ és γ egy olyan görbe, mint a 2.2. ábrán látható, $r = 1$ sugárral. Ekkor a

Fubini-tétel alapján

$$\int_0^{t_0} \mathrm{e}^{-2t} T(t)x \,\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \mathrm{e}^{-2t} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \mathrm{e}^{\mu t} R(\mu, A)x \, d\mu \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \int_0^{t_0} \mathrm{e}^{(\mu-2)t} \,\mathrm{d}t R(\mu, A)x \, d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{t_0(\mu-2)} - 1}{\mu - 2} R(\mu, A)x \, d\mu$$

$$= R(2, A)x + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{t_0(\mu-2)}}{\mu - 2} R(\mu, A)x \, d\mu. \tag{2.39}$$

Itt kihasználtuk a Cauchy-integrálformulát, amely szerint

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{R(\mu, A)}{\mu - 2} x \, d\mu = -R(2, A)x,$$

ami könnyen látható, ha a γ görbét lezárjuk ∞-be tartó sugarú körökkel. Ekkor $\mu \in \gamma$ esetén $\mathrm{Re}(\mu - 2) \leq -1$,

$$\left\| \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{t_0(\mu-2)}}{\mu - 2} R(\mu, A)x \, d\mu \right\| \leq \mathrm{e}^{-t_0} \cdot \|x\| \int_\gamma \frac{M_\varepsilon}{|\mu - 2| \cdot |\mu|} |d\mu|,$$

ahol felhasználtuk a (2.37) becslést. Ha $t_0 \to \infty$, akkor kapjuk, hogy a (2.39) egyenlőség 2. tagja 0-hoz tart, így $R(2, B) = R(2, A)$ következik. □

A következő tétel a korlátos analitikus félcsoportok karakterizációjáról szól.

2.65. Tétel. *Legyen $(A, D(A))$ lineáris operátor az X Banach-téren. Ekkor ekvivalensek.*

(i) A egy korlátos analitikus félcsoport generátora X-en;

(ii) Létezik olyan $\vartheta \in (0, \pi/2)$, amelyre az $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\vartheta} A$ operátorok egy-egy korlátos, erősen folytonos félcsoport generátorai;

(iii) A szektoriális.

Bizonyítás. $(iii) \Rightarrow (i)$: Következik a 2.64. Állításból.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Ha $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$ jelöli az A által generált δ szögű korlátos analitikus félcsoportot, akkor könnyen láthatól hogy $\vartheta \in (0, \delta)$ esetén az $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\vartheta} A$ operátorok a $\left(T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} t)\right)_{t \geq 0}$ ill. $\left(T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} t)\right)_{t \geq 0}$ korlátos, erősen folytonos félcsoportok generátorai.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, \lambda > 0$. Ekkor mivel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} A$ és $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta} A$ korlátos félcsoportok

generátorai, ezért könnyen látható, hogy $\lambda \in \rho(A)$ teljesül. Ha $M \geq 1$ jelöli a korlátos félcsoportok (egy) korlátját, akkor a 2.33. Tétel alapján

$$\|R(\lambda, A)\| = \|R(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\lambda, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\lambda)} = \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda\cos\vartheta - \operatorname{Im}\lambda\sin\vartheta}, \text{ ha } \operatorname{Im}\lambda \leq 0;$$
$$\|R(\lambda, A)\| = \|R(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\lambda, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\lambda)} = \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda\cos\vartheta + \operatorname{Im}\lambda\sin\vartheta}, \text{ ha } \operatorname{Im}\lambda > 0.$$

Egybevetve a fentieket kapjuk, hogy létezik olyan $\widetilde{M} \geq 1$ konstans, amelyre

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M'}{\operatorname{Re}\lambda + |\operatorname{Im}\lambda|} \leq \frac{\widetilde{M}}{|\lambda|}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Így $\delta = 0$-ra teljesülnek a feltételek A-ra a szektoriális operátor definíciójából. A nagyobb szektorra vonatkozó bizonyítást itt nem részletezzük. □

A tétel következményeként belátható az alábbi állítás Hilbert-téren.

2.66. Következmény. *Legyen $(A, D(A))$ egy Hilbert-téren értelmezett önadjungált, felülről korlátos operátor (ld. a 2.45. Állítást). Ekkor az általa generált félcsoport egy $\pi/2$ szögű, analitikus félcsoport.*[1]

2.67. Példa. A 2.50. Példa 2. pontjában meggondoltuk, hogy a

$$Af := f'', \quad D(A) := \Big\{f \in C^2[0,1] : f(0) = f(1) = 0\Big\}$$

operátor lezártja egy $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos kontrakciófélcsoportot generál az $X = L^2[0,1]$ Hilbert-téren. Könnyen meggondolható, hogy

$$\overline{A}f := f'', \quad D(\overline{A}) := \Big\{f \in H^2[0,1] : f(0) = f(1) = 0\Big\}$$

operátor önadjungált. Ugyanis legyen $f, g \in D(\overline{A})$, ekkor

$$\begin{aligned}\langle \overline{A}f, g\rangle &= \int_0^1 f''g = [f'g]_0^1 - \int_0^1 f'\overline{g}' \\ &= 0 - [f\overline{g}']_0^1 + \int_0^1 f\overline{g}'' = 0 + \int_0^1 f\overline{g}'' = \langle f, \overline{A}g\rangle.\end{aligned}$$

[1] Egy félcsoportot analitikusnak fogunk nevezni akkor is, ha létezik analitikus kiterjesztése egy megfelelő szektorra.

Tehát $\overline{A}$ szimmetrikus, így $\overline{A} \subset \overline{A}^*$. Mivel definíció szerint az $\overline{A}$ operátornak nem létezik valódi zárt kiterjesztése, az önadjungáltság következik. Ezek alapján azt is beláttuk, hogy

$$\langle \overline{A} f, f \rangle = -\int_0^1 f' \overline{f}' = -\|f'\|^2 \leq 0,$$

tehát $\overline{A}$ felülről korlátos. Így $(T(t))_{t \geq 0}$ analitikus is.

Szintén a 2.65. Tételből igazolható az alábbi.

2.68. Következmény. *Legyen A egy erősen folytonos csoport generátora. Ekkor A^2 egy $\pi/2$ szögű, analitikus félcsoportot generál.*

2.69. Példa. Véve az eltoláscsoportot $C_0(\mathbb{R})$-en vagy $L^p(\mathbb{R})$-en, $1 \leq p < \infty$, a generátora $Af = f'$, a megfelelő értelmezési tartománnyal (ld. a 2.25. Állítást). Ekkor ezen operátor négyzete

$$A^2 f = f'',$$

amely tehát egy korlátos analitikus félcsoportot generál. A gondolatmenetet több dimenzióra is általánosíthatjuk (ennek meggondolása nem könnyű, itt nem részletezzük), így kapjuk, hogy az

$$Af := \Delta f$$

$\mathbb{R}^n$ (megfelelő értelmezési tartománnyal) $\pi/2$ szögű, analitikus félcsoportot generál.

2.5.2. Differenciálható félcsoportok

A terminológiából következik, hogy egy erősen folytonos félcsoport esetén a

$$\xi_x : t \mapsto T(t)x$$

pálya pontosan akkor differenciálható minden $t \geq 0$-ra, ha $x \in D(A)$. Továbbá, pontosan akkor lesz minden pálya differenciálható, ha $D(A) = X$, vagyis ha A korlátos. A következő definícióban minden $x \in X$ esetén megkívánjuk ξ_x differenciálhatóságát, viszont nem minden $t \geq 0$-ra.

2.70. Definíció. Egy $(T(t))_{t \geq 0}$ erősen folytonos félcsoportot *differenciálható*nak mondunk, ha létezik olyan $t_0 \geq 0$, amelyre a $\xi_x : t \mapsto T(t)x$ pálya differenciálható (t_0, ∞)-n minden $x \in X$ esetén. A félcsoport *azonnal differenciálható*, ha $t_0 = 0$ választható.

2.71. Tétel. *Legyen* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport, amelyre* $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt}$ *teljesül, és legyen* $(A, D(A))$ *a generátora. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) $(T(t))_{t\geq 0}$ *differenciálható;*

(ii) Léteznek $a > 0$, $b > 0$ *és* $C > 0$ *konstansok, amelyekre*

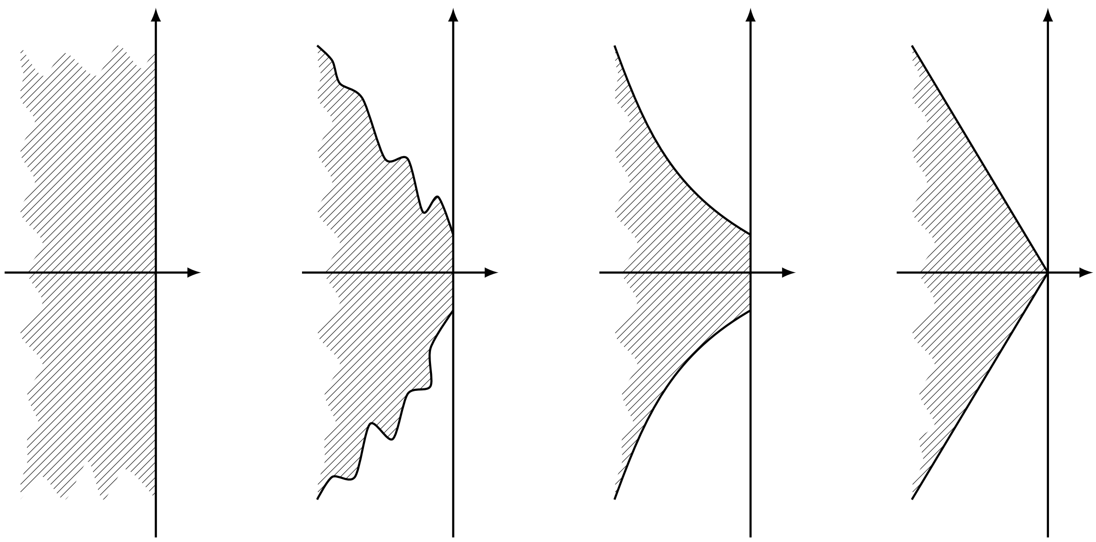
$$\Theta := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : a\mathrm{e}^{-b\operatorname{Re}\lambda} \leq |\operatorname{Im}\lambda|\right\} \subset \rho(A)$$

és

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C|\operatorname{Im}\lambda|$$

minden $\lambda \in \Theta$, $\operatorname{Re}\lambda \leq w$ *esetén.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □



(a) Általános félcsoport

(b) Normafolytonos félcsoport

(c) Differenciálható félcsoport

(d) Analitikus félcsoport

2.3. ábra. Félcsoportok generátorainak spektruma

2.5.3. Normafolytonos félcsoportok

Korábban (ld. az 1.3. alfejezetet) foglalkoztunk olyan félcsoportokkal, amelyekre a $t \mapsto T(t)$ leképezés $[0, \infty)$-n folytonos az operátornormára nézve. Most olyan félcsoportokról lesz szó, amelyekre a folytonosság csak egy későbbi, $s_0 > 0$ időponttól kezdve igaz. Az (FE) tulajdonság miatt a

$$\lim_{t \downarrow s_0} \|T(t) - T(s_0)\| = 0$$

feltételből már következik a $t \mapsto T(t)$ leképezés folytonossága az egész $[s_0, \infty)$ intervallumon.

2.72. Definíció. Egy $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoportot *normafolytonos*nak mondunk, ha létezik olyan $t_0 \geq 0$, amelyre a $t \mapsto T(t)$ leképezés folytonos (t_0, ∞)-ből $\mathscr{L}(X)$-be. A félcsoport *azonnal normafolytonos*, ha $t_0 = 0$ választható.

2.73. *Megjegyzés.* Fontos hangsúlyoznunk, hogy egy azonnal normafolytonos félcsoport nem feltétlenül egyenletesen folytonos.

2.74. Tétel. *Legyen $(A, D(A))$ egy normafolytonos félcsoport generátora. Ekkor minden $b \in \mathbb{R}$ esetén a*

$$\{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda \geq b\}$$

halmaz korlátos.

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

2.75. Következmény. *Legyen $(A, D(A))$ egy azonnal normafolytonos félcsoport generátora. Ekkor minden $a > \omega_0$ esetén*

$$\lim_{r \to \pm\infty} \|R(a + \mathrm{i}r, A)\| = 0.$$

2.5.4. Kompakt félcsoportok

Ebben a fejezetben az eddigiekkel ellentétben nem a $t \mapsto T(t)$ leképezések tulajdonságáról, hanem a $T(t)$ operátor(ok) tulajdonságáról lesz szó. A definíciót az alábbi lemmával készítjük elő.

2.76. Lemma. *Legyen* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport az* X *Banach-téren. Ha* $T(t_0)$ *kompakt valamely* $t_0 > 0$*-ra, akkor* $T(t)$ *kompakt minden* $t \geq t_0$ *esetén, és a* $t \mapsto T(t)$ *leképezés normafolytonos* $[t_0, \infty)$*-en.*

Bizonyítás. Az első állítás rögtön következik az (FE) tulajdonságból. Az 1.51. Lemma (*ii*) pontjából belátható, hogy $\lim_{h\to 0} T(s+h)x = T(s)x$ minden $s \geq 0$ és $K \subset X$ kompakt halmaz esetén egyenletesen teljesül. Legyen $U \subset X$ a zárt egységgömb. Mivel $T(t_0)$ kompakt, ezért $K := \overline{T(t_0)U}$ kompakt. Tehát $t \geq t_0$ esetén

$$\lim_{s\downarrow t} (T(t)x - T(s)x) = \lim_{s\downarrow t} (T(t-t_0) - T(s-t_0))\, T(t_0)x = 0$$

$x \in U$-ban egyenletesen. Ebből adódik, hogy $\lim_{s\downarrow t} (\|T(t) - T(s)\|) = 0$. □

2.77. Definíció. Egy $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoportról azt mondjuk, hogy *azonnal kompakt*, ha $T(t)$ kompakt minden $t > 0$ esetén, és *kompakt*, ha létezik olyan $t_0 > 0$, hogy $T(t_0)$ kompakt.

A 2.76. Lemmából következik, hogy egy (azonnal) kompakt félcsoport (azonnal) normafolytonos is. Az alábbiakból kiderül az is, hogy a félcsoport kompaktsága a rezolvens kompaktságával van összefüggésben. Előzetesen megjegyezzük, hogy ún. rezolvensegyenlőség miatt (ld. (4.3)) $R(\lambda, A)$ pontosan akkor kompakt valamely $\lambda \in \rho(A)$ esetén, ha minden $\lambda \in \rho(A)$ esetén kompakt.

2.78. Definíció. Egy A lineáris operátorról, melyre $\rho(A) \neq \emptyset$ azt mondjuk, hogy *kompakt rezolvensű*, ha $R(\lambda, A)$ kompakt valamely (minden) $\lambda \in \rho(A)$ esetén esetén.

Ha egy operátor egy végtelen dimenziós Banach-téren kompakt rezolvensű, akkor szükségképpen nemkorlátos. Konkrét operátorok esetén a következő karakterizáció igazolható.

2.79. Állítás. *Legyen* $(A, D(A))$ *lineáris operátor, amelyre* $\rho(A) \neq \emptyset$*, és definiálja* $X_1^A := (D(A), \|\cdot\|_A)$ *(ld. a 2.5. Definíció (iii) pontját). Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) Az A *operátor kompakt rezolvensű;*

(ii) Az $i : X_1^A \hookrightarrow X$ *kanonikus beágyazás kompakt.*

Bizonyítás. Meggondolható, hogy tetszőleges $\lambda \in \rho(A)$ esetén a $\|\cdot\|_A$ gráf-norma ekvivalens a

$$\|x\|_\lambda := \|(\lambda - A)x\|$$

normával. Most csak a $\lambda = 0$ esetre bizonyítjuk, a $\lambda \neq 0$ hasonlóan belátható. Ekkor $\|x\|_0 = \|Ax\|$, és azt kell megmutatni, hogy ez ekvivalens $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$-val. Mivel A^{-1} létezik és korlátos, ezért

$$\|Ax\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|A^{-1}Ax\| + \|Ax\| \leq (\|A^{-1}\| + 1) \cdot \|Ax\|,$$

amiből az állítás adódik. Így a

$$R(\lambda, A) : X \to (X_1^A, \|\cdot\|_\lambda)$$

operátor izomorfizmus, hiszen $\|(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}x\| = \|x\|$, amelynek korlátos inverze $\lambda - A$. Ebből az állítás a 2.4. ábrán látható faktorizáció alapján következik.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "R(\lambda, A)"] \arrow[d, shift right, "R(\lambda, A)"'] & X \\
X_1^A \arrow[u, shift right, "\lambda - A"'] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

2.4. ábra. Az X_1^A tér

$\square$

2.80. Példa.

1. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $X := C_0(\Omega)$. Legyen $(A, D(A))$ olyan operátor, amelynek értelmezési tartománya, $D(A)$ folytonosan beágyazható a

   $$C_0^1(\Omega) := \{f \in C_0(\Omega) : f \text{ differenciálható, és } f' \in C_0(\Omega)\}$$

   Banach-térbe. Az Arzelà–Ascoli-tétel miatt az $i : C_0^1(\Omega) \hookrightarrow C_0(\Omega)$ beágyazás kompakt, tehát A kompakt rezolvensű, ha $\rho(A) \neq \emptyset$.

2. Legyen $X := L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $\partial\Omega$ sima. Ekkor a Rellich-Kondracsov-féle beágyazási tételből következik, hogy ha $(A, D(A))$ olyan operátor, amelyre $\rho(A) \neq \emptyset$ és $D(A) \subset W^{1,p}(\Omega)$ folytonos beágyazással, akkor A kompakt rezolvensű.

2.81. Tétel. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $(T(t))_{t\geq 0}$ azonnal kompakt;

(ii) $(T(t))_{t\geq 0}$ azonnal normafolytonos és a generátora kompakt rezolvensű.

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: A 2.76. Lemmából következik, hogy egy azonnal kompakt félcsoport azonnal normafolytonos is. Ezért a rezolvens (2.13) integrálreprezentációjában szereplő integrál a normatopológiában létezik, így $R(\lambda, A)$ kompakt.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Legyen $\lambda \in \rho(A)$ tetszőleges. Jelölje rögzített $t > 0$, $x \in X$ esetén

$$V(t)x := \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s)x \,\mathrm{d}s.$$

A (2.11) egyenlet alapján

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x - x = (A - \lambda)V(t)x, \quad x \in X,$$

tehát

$$V(t) = R(\lambda, A)\left(\mathrm{Id} - \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)\right).$$

Mivel a feltétel szerint $R(\lambda, A)$ kompakt, ezért $V(t)$ is kompakt minden $t > 0$-ra. Másrészt, a félcsoport normafolytonossága miatt a

$$T(t) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\left(V(t+h) - V(t)\right)$$

határérték operátornormában létezik. Így $T(t)$ kompakt is minden $t > 0$ esetén. $\square$

A félcsoportok tulajdonságai közötti összefüggéseket az alábbi diagram szemlélteti.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{analitikus} & \Longrightarrow & \text{azonnal differenciálható} & \Longrightarrow & \text{differenciálható} \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & \text{azonnal normafolytonos} & \Longrightarrow & \text{normafolytonos} \\
 & & \Uparrow & & \Uparrow \\
 & & \text{azonnal kompakt} & \Longrightarrow & \text{kompakt}
\end{array} \tag{2.40}$$

2.5.5. Példák

Nilpotens félcsoportok

A

$$T(t)f(s) := \begin{cases} f(s+t), & \text{ha } s+t \leq 1, \\ 0, & \text{ha } s+t > 1, \end{cases}$$

nilpotens félcsoport $C_0[0,1)$-en (vagy $L^p[0,1]$-en) tipikus példa olyan félcsoportra, ami „jó" tulajdonságokkal rendelkezik $t > 1$ esetén, $t < 1$ esetén viszont nem. Pontosabban, $t > 1$-re normafolytonos, differenciálható és kompakt, de nem azonnal differenciálható, nem azonnal normafolytonos és nem azonnal kompakt.

Szorzásfélcsoport

Az 1.34. Definíciónak megfelelően legyen

$$M_q : f \mapsto q \cdot f$$

szorzásoperátor a $X = C_0(\Omega)$ (vagy $X = L^p(\Omega)$) téren valamely $q : \Omega \to \mathbb{C}$ folytonos függvényre. Ha $\sup_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty$, akkor

$$T_q(t)f := \mathrm{e}^{tq} \cdot f, \quad t \geq 0$$

egy erősen folytonos félcsoportot definiál (ld. az 1.35. Állítást), amelyre a következő teljesül (ld. a 2.65., a 2.71. és a 2.74. Tételeket).

2.82. Tétel. *Legyen $(T_q(t))_{t\geq 0}$ az M_q szorzásoperátor által generált szorzásfélcsoport X-en. Ekkor*

(a) $(T_q(t))_{t\geq 0}$ pontosan akkor δ szögű korlátos analitikus félcsoport, ha

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{q(\Omega)} = \rho(M_q).$$

(b) $(T_q(t))_{t\geq 0}$ pontosan akkor (azonnal) differenciálható $t > t_0$ esetén, ha létezik $c > 0$, amelyre

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : c\mathrm{e}^{-t_0 \operatorname{Re}\lambda} < |\operatorname{Im}\lambda|\right\} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{q(\Omega)} = \rho(M_q).$$

(c) $(T_q(t))_{t\geq 0}$ *pontosan akkor (azonnal) normafolytonos, ha*

$$\overline{q(\Omega)} \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq b\}$$

korlátos minden $b \in \mathbb{R}$ *esetén.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

A tételből kiderül, hogy a szorzásfélcsoportok esetén a spektrum elhelyezkedése karakterizálja a félcsoport regularitási tulajdonságait, a rezolvens becslésére nincs is szükség. Mivel a generátor spektruma a q függvény képhalmazának lezártja, ezért a q függvény tulajdonságai közvetlenül megfelelnek az M_q operátor, és ezzel együtt a $(T_q(t))_{t\geq 0}$ félcsoport tulajdonságainak.

2.6. Feladatok

2.1. Feladat. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, és D az Ω-n értelmezett kompakt tartójú folytonos függvények tere. Igazoljuk, hogy ha M_q egy $C_0(\Omega)$-n értelmezett szorzásoperátor, akkor D ennek lényeges része (core-ja)!

2.2. Feladat. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $X := C_0(\Omega)$. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport X-en, amelynek generátora $(A, D(A))$. Igazoljuk, hogy a következő állítások ekvivalensek!

(i) $(T(t))_{t\geq 0}$ *algebra-homomorfizmus*okból áll, vagyis

$$T(t)(f \cdot g) = T(t)f \cdot T(t)g, \quad f, g \in X, t \geq 0;$$

(ii) $(A, D(A))$ *deriválás*, vagyis $D(A)$ az X részalgebrája, és

$$A(f \cdot g) = Af \cdot g + f \cdot Ag, \quad f, g \in D(A).$$

(Segítség: a $(ii) \Rightarrow (i)$ irányhoz tekintsük az $s \mapsto T(t-s)[T(s)f \cdot T(s)g]$, $0 \leq s \leq t$ leképezést!)

2.3. Feladat. Legyen M_q szorzásoperátor $X = C_0(\mathbb{R}_+)$-on, és definiáljuk az

$$A := \begin{pmatrix} M_q & M_q \\ 0 & M_q \end{pmatrix}$$

operátort $D(A) = D(M_q) \times D(M_q)$ értelmezési tartománnyal $X \times X$-en.

(a) Igazoljuk, hogy ha $q(s) = \mathrm{i}s$, $s \geq 0$, akkor $\|R(\lambda, A)\| \leq {}^2\!/\!_\lambda$, $\lambda > 0$, de $(A, D(A))$ nem generátor!

(b) Adjunk meg olyan q nemkorlátos függvényt $\mathbb{R}_+$-on, amelyre A generátor!

(c) Keressünk szükséges és elégséges feltételt q-ra, hogy A generátor legyen!

2.4. Feladat. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren. Mutassuk meg, hogy ha létezik olyan $t_0 > 0$, amelyre $\mathrm{Id} - T(t_0)$ kompakt, akkor $(T(t))_{t\geq 0}$ beágyazható egy $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ csoportba! (Segítség: elég megmutatni, hogy a 0 nem sajátértéke $T(t_0)$-nak.)

3. fejezet

Félcsoportok perturbációja és approximációja

Probléma: Legyen $A : D(A) \subset X \to X$ egy $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos operátorfélcsoport generátora, és legyen $B : D(B) \subset X \to X$ egy másik operátor. Keressünk feltételeket B-re, hogy az $A+B$ összeg egy $(S(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos operátorfélcsoport generátora legyen.

3.1. Példa. Legyen $(A, D(A))$ egy nemkorlátos generátor, tehát $D(A) \subset X$ valódi sűrű altér, és $B := -A$. Ekkor $A+B$ az azonosan 0 operátor, egy valódi sűrű altéren definiálva, amely így nem zárt, tehát nem lehet generátor. Legyen most $B := -2A$. Ekkor $A + B = -A$, $D(A + B) = D(A)$, amely pontosan akkor generátor, ha A egy csoport generátora. Előfordulhat az is, hogy B is generátor, de $D(A) \cap D(B) = \{0\}$.

3.1. Korlátos perturbációk

3.2. Tétel (Korlátos perturbáció). *Legyen $(A, D(A))$ a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora az X Banach-téren, amelyre*

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Ha $B \in \mathscr{L}(X)$, akkor

$$C := A + B, \quad D(C) = D(A)$$

is egy $(S(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora, amelyre

$$\|S(t)\| \leq M\mathrm{e}^{(w+M\|B\|)t}, \quad t \geq 0.$$

Bizonyítás. Első lépésben tegyük fel, hogy $w = 0$, $M = 1$. Ekkor minden $\lambda > 0$ esetén $\lambda \in \rho(A)$, és

$$\lambda - C = \lambda - A - B = (\mathrm{Id} - BR(\lambda, A))\,(\lambda - A).$$

Mivel $\lambda - A$ bijektív, ezért $\lambda - C$ pontosan akkor lesz bijektív (azaz pontosan akkor lesz $\lambda \in \rho(C)$), ha $\mathrm{Id} - BR(\lambda, A)$ invertálható. Ha ez teljesül, akkor

$$R(\lambda, C) = R(\lambda, A)[\mathrm{Id} - BR(\lambda, A)]^{-1}. \tag{3.1}$$

Legyen most $\operatorname{Re}\lambda > \|B\|$. Ekkor a 2.30. Hille–Yosida-tétel alapján

$$\|BR(\lambda, A)\| \leq {}^{\|B\|}/_{\operatorname{Re}\lambda} < 1,$$

tehát $\lambda \in \rho(C)$, és

$$R(\lambda, C) = R(\lambda, A) \sum_{n=0}^{\infty} (BR(\lambda, A))^n\,. \tag{3.2}$$

A C rezolvensének normáját az alábbi módon becsülhetjük:

$$\|R(\lambda, C)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} \cdot \frac{1}{1 - {}^{\|B\|}/_{\operatorname{Re}\lambda}} = \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \|B\|},$$

ha $\operatorname{Re}\lambda > \|B\|$. Így a 2.31. Következmény alapján C egy $(S(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoportot generál, amelyre

$$\|S(t)\| \leq \mathrm{e}^{\|B\|t}, \quad t \geq 0.$$

Általános $w \in \mathbb{R}$ és $M \geq 1$ esetén először átskálázzuk a félcsoportot (ld. a 2.2.1. alpontot) úgy, hogy $w = 0$ legyen, tehát $\|T(t)\| \leq M$. Vezessük be a

$$|\!|\!|x|\!|\!| := \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\|$$

normát X-en! Ez a norma ekvivalens az eredetivel, és

$$\|x\| \leq |\!|\!|x|\!|\!| \leq M\|x\|.$$

Tehát a $|||\cdot|||$ normára nézve $(T(t))_{t\geq 0}$ kontrakció-félcsoport lesz, továbbá

$$|||Bx||| \leq M\|B\| \cdot \|x\| \leq M\|B\| \cdot |||x|||$$

minden $x \in X$ esetén. A bizonyítás első része alapján így C egy $(S(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoportot generál, amelyre

$$|||S(t)||| \leq \mathrm{e}^{|||B|||t} \leq \mathrm{e}^{M\|B\|t}.$$

Tehát

$$\|S(t)x\| \leq |||S(t)x||| \leq \mathrm{e}^{M\|B\|t} \cdot |||x||| \leq M\mathrm{e}^{M\|B\|t} \cdot \|x\|$$

minden $t \geq 0$ esetén, ami éppen a kívánt becslés $w = 0$-ra. □

Vegyük észre, hogy a perturbált operátor rezolvensére kaptunk egy (3.2) végtelen sorelőállítást, míg a generált félcsoportnak csak a létezését bizonyítottuk. Célunk, hogy a félcsoportot is állítsuk elő valamilyen módon az eredetiből.

3.3. Következmény. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport, amelynek generátora $(A, D(A))$, legyen $B \in \mathscr{L}(X)$ és $(S(t))_{t\geq 0}$ a $C := A + B$ által generált erősen folytonos félcsoport. Ekkor minden $x \in X$ és $t \geq 0$ esetén*

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BS(s)x \,\mathrm{d}s. \tag{IE}$$

Bizonyítás. Legyen $x \in D(A)$, és tekintsük a

$$[0,t] \ni s \mapsto \xi_x(s) := T(t-s)S(s)x \in X$$

függvényt! Mivel $D(A) = D(C)$ invariáns mindkét félcsoportra nézve, ezért

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\xi_x(s) = T(t-s)CS(s)x - T(t-s)AS(s)x = T(t-s)BS(s)x.$$

Ebből

$$S(t)x - T(t)x = \xi_x(t) - \xi_x(0) = \int_0^t \xi_x'(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t T(t-s)BS(s)x \,\mathrm{d}s.$$

Mivel $D(A)$ sűrű és a szereplő operátorok korlátosak, az egyenlet adódik minden $x \in X$-re. □

Vegyük észre, hogy ha a fenti ξ_x függvényt a

$$\xi_x(s) := S(s)T(t-s)x$$

függvénnyel helyettesítjük, akkor egy hasonló

$$\text{(IE*)} \qquad S(t)x = T(t)x + \int_0^t S(s)BT(t-s)x\,\mathrm{d}s$$

integrálegyenlethez jutunk. Az (IE) és (IE*) egyenleteket szokás *konstansvariációs formuláknak* is hívni.

Ahhoz, hogy az (IE) egyenletet megoldjuk, operátoregyenletté fogjuk átírni a

$$\text{(3.3)} \qquad \mathcal{X}_{t_0} := C\left([0,t_0], \mathcal{L}_s(X)\right)$$

függvénytéren, amely azokat az $F : [0,t_0] \to \mathscr{L}(X)$ függvényeket tartalmazza, amelyekre a $t \mapsto F(t)x$ leképezés minden $x \in X$ esetén folytonos $[0,t_0]$-on. Az $\mathcal{X}_{t_0}$ tér Banach-tér az

$$\|F\|_\infty := \sup_{s\in[0,t_0]} \|F(s)\|$$

normával.

3.4. Definíció. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren, $B \in \mathscr{L}(X)$. Ekkor tetszőleges $t_0 > 0$ esetén a $V = V_{t_0} : \mathcal{X}_{t_0} \to \mathcal{X}_{t_0}$,

$$\text{(3.4)} \qquad (VF)(t)x := \int_0^t T(t-s)BF(s)x\,\mathrm{d}s,$$

($x \in X$, $F \in \mathcal{X}_{t_0}$, $0 \leq t \leq t_0$) képlettel definiált operátor a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoporthoz és a B operátorhoz tartozó *absztrakt Volterra-operátor.*

3.5. Lemma. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren, $B \in \mathscr{L}(X)$, és V a hozzájuk tartozó absztrakt Volterra-operátor. Ekkor V korlátos lineáris operátor az $\mathcal{X}_{t_0}$ Banach-téren, és*

$$\|V^n\| \leq \frac{(M\|B\|t_0)^n}{n!}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $M := \sup_{s\in[0,t_0]} \|T(s)\|$. Következésképpen, a spektrálsugárra

$$r(V) = 0.$$

Bizonyítás. Következik a skalár értékű Volterra-operátorra vonatkozó megfelelő állításból, így nem részletezzük. □

A legutóbbi állítasból következik, hogy $1 \in \rho(V)$, és az

$$R(1, V) = (\mathrm{Id} - V)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} V^n$$

Neumann-féle sorelőállítás érvényes. Az (IE) integrálegyenletet a Volterra-operátor segítségével

$$T(\cdot) = (\mathrm{Id} - V)S(\cdot)$$

alakban írhatjuk fel, ahol $T(\cdot), S(\cdot) \in \mathcal{X}_{t_0}$. Így kapjuk, hogy

$$S(\cdot) = R(1, V)T(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} V^n T(\cdot), \tag{3.5}$$

ahol a sor az $\mathcal{X}_{t_0}$ térben konvergál. Átírva a (3.5) végtelen sort tetszőleges $t \in [0, t_0]$-ra az $(S(t))_{t \geq 0}$ félcsoport egy előállítását kapjuk. A kapott végtelen sort szokás *Dyson–Phillips-sor*nak nevezni.

3.6. Tétel. *Legyen $(S(t))_{t\geq 0}$ az $A+B$ operátor által generált félcsoport, ahol A a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora az X Banach-téren, és legyen $B \in \mathscr{L}(X)$. Ekkor*

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t), \tag{3.6}$$

ahol $S_0(t) = T(t)$,

$$S_{n+1}(t) := V S_n(t) = \int_0^t T(t-s) B S_n(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.7}$$

A (3.6) Dyson–Phillips-sor az $\mathscr{L}(X)$ operátornormájában konvergens, és mivel a 3.5. Lemmában t_0-t tetszőlegesen nagynak választhatjuk, a konvergencia $\mathbb{R}_+$ kompakt intervallumain egyenletes. Másrészt, a (3.7) definícióban az integrál pontonként, azaz az erős topológiában értendő.

A Dyson–Phillips-sor és az (IE) integrálegyenlet lehetővé teszi az eredeti és a perturbált félcsoport kvalitatív tulajdonságainak összehasonlítását.

3.7. Következmény. *Legyenek $(T(t))_{t\geq 0}$ és $(S(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoportok, ahol $(S(t))_{t\geq 0}$ generátora a $(T(t))_{t\geq 0}$ generátorának egy korlátos perturbációja. Ekkor létezik olyan $M \geq 0$ konstans, hogy*

$$\|T(t) - S(t)\| \leq tM, \tag{3.8}$$

ha $t \in [0, 1]$.

Bizonyítás. Az (IE) integrálegyenletből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|T(t)x - S(t)x\| &\leq \int_0^t \|T(t-s)BS(s)x\| \,\mathrm{d}s \\ &\leq t \sup_{r\in[0,1]} \|T(r)\| \sup_{s\in[0,1]} \|S(s)\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|,\end{aligned}$$

ha $x \in X$, $t \in [0, 1]$. □

Most vizsgáljuk meg, hogy a 2.5. alfejezetben tárgyalt regularitási tulajdonságok közül melyek őrződnek meg a perturbált félcsoportra.

3.8. Állítás. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren, amelynek generátora $(A, D(A))$, és legyen $B \in \mathscr{L}(X)$. Ekkor*

(a) Ha $(T(t))_{t\geq 0}$ analitikus, akkor az $A + B$ által generált $(S(t))_{t\geq 0}$ félcsoport is az.

(b) Ha A kompakt rezolvensű, akkor $A + B$ is az.

Bizonyítás.

(a) A 2.65. Tételhez hasonlóan meggondolható, hogy ha A analitikus félcsoportot generál, akkor valamely $\vartheta \in (0, \pi/2)$ számra az $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\vartheta}A$ operátorok egy-egy erősen folytonos félcsoport generátorai. Ha $B \in \mathscr{L}(X)$, akkor a 3.2. Tétel szerint $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\vartheta}(A + B)$ is félcsoportot generál. Ekkor létezik olyan $\omega > 0$, hogy az $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\vartheta}(A + B - \omega)$ operátorok korlátos félcsoportot generálnak. A 2.65. Tétel alapján ez ekvivalens azzal, hogy $A+B-\omega$ korlátos analitikus félcsoportot generál. A 2.60. Állításból pedig következik, hogy ekkor $A + B$ egy analitikus félcsoport generátora.

(b) Az állítás következik abból, hogy a (3.1) egyenlőség alapján $R(\lambda, A + B)$ a kompakt $R(\lambda, A)$ és a korlátos $[\mathrm{Id} - BR(\lambda, A)]^{-1}$ operátorok szorzata. □

Az alábbi két állítás a konvolúció és a Dyson–Phillips-sor tulajdonságaiból adódik, a bizonyításokat itt nem részletezzük.

3.9. Állítás. *Legyen* $(T(t))_{t\geq 0}$ *normafolytonos (vagy kompakt) félcsoport az* X *Banach-téren, amelynek generátora* $(A, D(A))$, *és legyen* B *kompakt operátor. Ekkor az* $A + B$ *által generált* $(S(t))_{t\geq 0}$ *félcsoport is normafolytonos (illetve kompakt).*

3.10. Állítás. *Legyen* $(T(t))_{t\geq 0}$ *azonnal normafolytonos (vagy azonnal kompakt) félcsoport az* X *Banach-téren, amelynek generátora* $(A, D(A))$, *és legyen* $B \in \mathscr{L}(X)$. *Ekkor az* $A + B$ *által generált* $(S(t))_{t\geq 0}$ *félcsoport is azonnal normafolytonos (illetve azonnal kompakt).*

3.2. Kontraktív és analitikus félcsoportok perturbációi

Ha $D(A) \cap D(B)$ túl kicsi (a lezártja nem sűrű altér X-ben), akkor nem reménykedhetünk benne, hogy $A + B$ (alkalmas kiterjesztése) generátor lesz. Az alábbiakban nem a korlátosságot tesszük fel B-ről, hanem csak annyit, hogy „elég közel van” az A operátorhoz.

3.11. Definíció. Legyen $A : D(A) \subset X \to X$ lineáris operátor az X Banach-téren. Azt mondjuk, hogy a $B : D(B) \subset X \to X$ operátor *(relatív) A-korlátos*, ha $D(A) \subset D(B)$, és léteznek olyan $a, b > 0$ konstansok, amelyekre minden $x \in D(A)$ esetén

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|. \tag{3.9}$$

A B operátor *A-korlátja*

$$a_0 := \inf\{a \geq 0 : \text{ létezik olyan } b > 0, \text{ amelyre (3.9) fennáll}\}.$$

A következőkben bizonyítás nélkül mondunk ki két tételt A-korlátos perturbációkról.

3.12. Tétel. *Legyen* $(A, D(A))$ *egy kontrakció-félcsoport generátora, és tegyük fel, hogy a* $(B, D(B))$ *operátor disszipatív, és A-korlátos* $a_0 < 1$ *A-korláttal. Ekkor* $(A + B, D(A))$ *is kontrakció-félcsoportot generál.*

3.13. Tétel. *Legyen* $(A, D(A))$ *egy analitikus félcsoport generátora. Ekkor létezik olyan* $\alpha > 0$ *szám, hogy minden olyan* B A*-korlátos operátor esetén, amelynek* A*-korlátja* $a_0 < \alpha$*, az* $(A + B, D(A))$ *operátor is analitikus félcsoportot generál.*

A következő definíció olyan B operátorokról szól, amelyek kompaktak X_1^A-n.

3.14. Definíció. Legyen $(A, D(A))$ zárt operátor az X Banach-téren. Azt mondjuk, hogy a $B : D(B) \subset X \to X$ operátor *(relatív)* A*-kompakt*, ha $D(A) \subset D(B)$, és $B : X_1 \to X$ kompakt, ahol $X_1^A = (D(A), \|\cdot\|_A)$ a gráf-normával ellátott $D(A)$ Banach-tér.

3.15. Tétel. *Legyen* $(A, D(A))$ *egy erősen folytonos félcsoport generátora az* X *Banach-téren, és tegyük fel, hogy a* B *operátor* A*-kompakt. Ha* X *reflexív vagy* B *lezárható, akkor az alábbiak teljesülnek.*

(a) Ha A *és* B *disszipatív is, akkor* $(A+cB, D(A))$ *kontrakció-félcsoportot generál* X*-en minden* $c > 0$ *esetén.*

(b) Ha az A *által generált félcsoport analitikus, akkor* $(A + cB, D(A))$ *analitikus félcsoportot generál* X*-en minden* $c \in \mathbb{C}$ *esetén.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

3.3. További perturbációk

Az eddigi perturbációs tételek $A+B$ rezolvensének explicit alakján (ld. a (3.1) egyenlőséget) és a Hille–Yosida-tételen múltak. Ez a megközelítés azonban csak nagyon speciális perturbációk esetén működik (ha a perturbáló operátor korlátos, vagy a perturbálandó félcsoport kontraktív ill. analitikus). A továbbiakban néhány olyan perturbációs tételt mondunk ki, amelyek az (IE) ill. (IE*) integrálegyenleteken alapulnak, és ezáltal különféle nemkorlátos perturbációk esetén is jól használhatók. Mielőtt ezekre rátérnénk, szükségünk lesz bizonyos Szoboljev-terek ismeretére.

3.3.1. Kis kitérő a Szoboljev-tornyok felé

Legyen $(A, D(A))$ a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora az X Banach-téren. Átskálázás után feltehető, hogy $\omega_0 < 0$, tehát A invertálható, azaz létezik $A^{-1} \in \mathscr{L}(X)$. Az alábbiakban minden n-re bevezetünk egy új normát $D(A^n)$-en.

3.16. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $x \in D(A^n)$. Ekkor definiálja

$$\|x\|_n := \|A^n x\|,$$

és legyen

$$X_n = X_n^A := (D(A^n), \|\cdot\|_n)$$

a $(T(t))_{t\geq 0}$-hez tartozó n-edik Szoboljev-tér. A $T(t)$ operátorok megszorítását jelölje

$$T_n(t) := T(t)|_{X_n}.$$

Kiderül, hogy a $T_n(t)$ operátorok nagyon jól viselkednek X_n-en.

3.17. Állítás. *A 3.16. Definícióban szereplő terekre és operátorokra az alábbiak teljesülnek.*

(a) Minden n-re X_n Banach-tér.

(b) A $(T_n(t))_{t\geq 0}$ egy erősen folytonos félcsoport X_n-en.

(c) A $(T_n(t))_{t\geq 0}$ félcsoport A_n generátora az A operátor része X_n-en, vagyis

$$\begin{aligned} D(A_n) &= \{x \in X_n : Ax \in X_n\} = D(A^{n+1}) = X_{n+1}, \\ A_n x &= Ax, \quad x \in D(A_n). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az állítást elegendő $n = 1$-re megmutatni, utána indukcióval következik.

(a) Mivel A zárt operátor, ezért az $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$ gráf-normával $(D(A), \|\cdot\|_A)$ Banach-tér. Megmutatjuk, hogy $\|\cdot\|_1$ ekvivalens $\|\cdot\|_A$-val, amiből az állítás következik. Nyilván:

$$\begin{aligned} \|x\|_A = \|x\| + \|Ax\| = \|A^{-1}Ax\| + \|Ax\| &\leq (\|A^{-1}\| + 1) \cdot \|x\|_1 \\ &\leq (\|A^{-1}\| + 1) \cdot \|x\|_A, \end{aligned}$$

ha $x \in X_1 = D(A)$.

(b) A 2.4. Lemma (b) pontja alapján $T(t)$ önmagába képezi X_1-et. Másrészt, $T_1(t)$ korlátos operátor X_1-en, hiszen

$$\|T_1(t)x\|_1 = \|AT(t)x\| = \|T(t)Ax\| \leq \|T(t)\| \cdot \|x\|_1, \quad x \in X_1,$$

tehát $(T_n(t))_{t\geq 0}$ félcsoportot alkot X_1-en. Az erős folytonosság következik abból, hogy

$$\|T_1(t)x - x\|_1 = \|T(t)Ax - Ax\| \to 0, \quad t \downarrow 0,\ x \in X_1.$$

(c) A 2.2.1. alpontból következik. $\square$

A fenti tereket és félcsoportokat a 3.1. ábra szemlélteti. Ehhez gondoljuk meg, hogy A_n izometria is X_{n+1}-ből X_n-be. Vezessük be az $X_0 := X$, $T_0(t) := T(t)$ és $A_0 := A$ jelöléseket.

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "T_0(t)"] & X_0 \arrow[d, "A_0^{-1}"] \\
X_1 \arrow[u, "A_0"] \arrow[r, "T_1(t)"] & X_1 = (D(A_0), \|\cdot\|_1) \arrow[d, "A_1^{-1}"] \\
X_2 \arrow[u, "A_1"] \arrow[r, "T_2(t)"] & X_2 = (D(A_1), \|\cdot\|_2) = (D(A_0^2), \|\cdot\|_2) \arrow[d, "A_2^{-1}"] \\
\vdots \arrow[u, "A_2"] & \vdots
\end{tikzcd}$$

3.1. ábra. A $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoporthoz tartozó n-edrendű Szoboljev-terek, $n \geq 0$

Vegyük észre, hogy $X_{n+1} \subset X_n$ sűrű altér, másrészt X_{n+1} izometrikusan izomorf X_n-el az A_n operátor által. Hasonlóan, a $(T_{n+1}(t))_{t\geq 0}$ félcsoport egyrészt a $(T_n(t))_{t\geq 0}$ félcsoport megszorítása, másrészt hasonló hozzá.

3.18. Következmény. *Az összes $(T_n(t))_{t\geq 0}$ félcsoport hasonló egymáshoz. Pontosabban,*

$$T_{n+1}(t) = A_n^{-1} T_n(t) A_n = T_n(t)|_{X_n}, \quad n \geq 0.$$

Emiatt a $(T_n(t))_{t\geq 0}$ félcsoportok spektrumai, spektrálkorlátjai, növekedési korlátjai, stb. mind megegyeznek.

A fenit konstrukció során az $n+1$-edik Szoboljev-teret az n-edik Szoboljev-térből definiáltuk. Mivel X_{n+1} sűrű X_n-ben, ezért az eljárást megfordíthatjuk azáltal, hogy X_n-et X_{n+1}-ből nyerjük az

$$\|x\|_n := \|A_{n+1}^{-1}x\|_{n+1}$$

norma teljessé tételével. Ezt továbbgondolva a fenti diagramot egy két irányban végtelen diagrammá bővíthetjük, az *extrapolációs* vagy negatív rendű Szoboljev-terek bevezetésével.

3.19. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy az $(X_{-n+1}, \|\cdot\|_{-n+1})$ teret és a rajta értelmezett $(T_{-n+1}(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoportot már definiáltuk. Legyen A_{-n+1} a $(T_{-n+1}(t))_{t\geq 0}$ félcsoport generátora. Ekkor legyen egy $x \in X_{-n+1}$ vektor esetén

$$\|x\|_{-n} := \|A_{-n+1}^{-1}x\|_{-n+1},$$

és legyen az

$$X_{-n} := (X_{-n+1}, \|\cdot\|_{-n})^{\sim}$$

teljessé tétel a $(T(t))_{t\geq 0}$-hez tartozó *$-n$-edrendű Szoboljev-tér*. Legyen továbbá $(T_{-n}(t))_{t\geq 0}$ a $(T_{-n+1}(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport X_{-n}-re való folytonos kiterjesztése, A_{-n} pedig a $(T_{-n}(t))_{t\geq 0}$ félcsoport generátora.

Vegyük észre, hogy a $T_{-n}(t)$ operátorok hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a 3.17. Állításban, ezért az ott elmondottak érvényesek minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén is.

3.20. Tétel. *A fenti definícióban szereplő terekre és operátorokra az alábbiak teljesülnek minden $m \geq n$, $m, n \in \mathbb{Z}$ esetén.*

(a) X_n Banach-tér, amely X_m-et sűrű altérként tartalmazza.

(b) A $T_n(t)$ operátorok egy $(T_n(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoportot alkotnak X_n-en.

(c) A $(T_n(t))_{t\geq 0}$ félcsoport A_n generátorának értelmezési tartománya $D(A_n) = X_{n+1}$ és A_n az $A_m : X_{m+1} \to X_m$ operátor egyértelmű folytonos kiterjesztése X_{n+1}-ről X_n-re.

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk, hasonlóan megy, mint a 3.17. Állítás bizonyítása. □

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots \arrow[d, "A_{-2}^{-1}"] \\
X_{-1} \arrow[u, "A_{-2}"] \arrow[r, "T_{-1}(t)"] & X_{-1} = (X_0, \|\cdot\|_{-1}^{\sim}) \arrow[d, "A_{-1}^{-1}"] \\
X_0 \arrow[u, "A_{-1}"] \arrow[r, "T_0(t)"] & X_0 \arrow[d, "A_0^{-1}"] \\
X_1 \arrow[u, "A_0"] \arrow[r, "T_1(t)"] & X_1 = (D(A_0), \|\cdot\|_1) \arrow[d, "A_1^{-1}"] \\
\vdots \arrow[u, "A_1"] & \vdots
\end{tikzcd}
$$

3.2. ábra. A $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoporthoz tartozó n-edrendű Szoboljev-terek, $n \in \mathbb{Z}$

Így tehát Banach terek és rajtuk értelmezett félcsoportok két irányban végtelen sorozatát hoztuk létre, amelyet a következő 3.2. ábra szemléltet. Ezt a konstrukciót *Szoboljev-torony*nak is szokás nevezni. Vegyük észre, hogy a torony bármely $k \in \mathbb{Z}$ szintjéről indulva ugyanazt a Banach-tér- ill. félcsoport-sorozatot nyerjük. Továbbá, tetszőleges X_n $(n \in \mathbb{Z})$ térre igaz, hogy – izomorfizmustól eltekintve – az X_m altérnek teljessé tétele, $m \geq n$ esetén.

Szorzásfélcsoportok esetén az összes Szoboljev-tér könnyen azonosítható egy-egy konkrét függvénytérrel.

3.21. Példa. Legyen $X_0 := C_0(\Omega)$, a $q : \Omega \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, amelyre $\sup_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s) < 0$. Ahogy az 1.4.1. alpontban bevezettük, definiálja

$$M_q f := q \cdot f$$

a q-val való szorzásoperátort, és

$$T_q(t)f := \mathrm{e}^{qt} \cdot f, \quad t \geq 0, f \in X_0$$

a megfelelő szorzásfélcsoportot. Ekkor az $X_0 = C_0(\Omega)$ és X_n Szoboljev-terek minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén az

$$X_n = \{q^{-n} \cdot f : f \in X_0\} = \{g \in C(\Omega) : q^n \cdot g \in X_0\}$$

módon adhatók meg.
Hasonló állítás igaz, ha az

$$X_0 = L^p(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty$$

térből indulunk, és olyan $q : \Omega \to \mathbb{C}$ mérhető függvényt tekintünk, amelyre $\operatorname{ess\,sup} \operatorname{Re} q < 0$, ld. az 1.4.2. alpontot. Ekkor a megfelelő módon definiálva a szorzásfélcsoportot, kapjuk, hogy

$$X_n = L^p(\Omega, |q|^{np} \cdot \mu), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3.3.2. Desch–Schappacher-perturbáció

Ebben az alpontban olyan perturbációkkal foglalkozunk, amelyek a 3.3. Következményben szereplő (IE) kontansvariációs formula általánosításán alapulnak.

Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren, és tekintsük a 3.3.1. alpontban bevezetett $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ extrapolált félcsoportot az X_{-1} Banach-téren. Ahogy a (3.3) egyenletben, definiáljuk az

$$\mathcal{X}_{t_0} := C\left([0, t_0], \mathcal{L}_s(X)\right)$$

függvényteret, amely olyan $F : [0, t_0] \to \mathscr{L}(X)$ függvényeket tartalmaz, amelyekre a $t \mapsto F(t)x$ leképezés minden $x \in X$ esetén folytonos. Az $\mathcal{X}_{t_0}$ tér Banach-tér az

$$\|F\|_\infty := \sup_{s\in[0,t_0]} \|F(s)\|$$

normával. Ezen a téren definiáljuk egy adott $B \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$ operátor esetén a V_B *absztrakt Volterra-operátort* (ld. a 3.4. Definíciót) mint $V_B : \mathcal{X}_{t_0} \to \mathcal{X}_{t_0}$ operátort, amelyre

$$(V_B F)(t) := \int_0^t T_{-1}(t-s)BF(s)\,\mathrm{d}s \in \mathcal{L}(X, X_{-1}),$$

$F \in \mathcal{X}_{t_0}$, $0 \leq t \leq t_0$, és az integrál erős értelemben (pontonként) konvergál X_{-1}-en. Tegyük fel, hogy minden $F \in \mathcal{X}_{t_0}$ esetén

1. $\operatorname{ran}((V_B F)(t)) \subset X$, $t \in [0, t_0]$,
2. a $[0, t_0] \ni t \mapsto (V_B F)(t)x$ leképezés folytonos minden $x \in X$ esetén,
3. V_B korlátos operátor $\mathcal{X}_{t_0}$-on, és $\|V_B\| < 1$.

3.22. Definíció. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren, és legyen $(A, D(A))$ a generátora. Ekkor definiálja

$$\mathcal{S}_{t_0}^{DS} := \{B \in \mathcal{L}(X, X_{-1}) : V_B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_{t_0}), \|V_B\| < 1\},$$

vagyis olyan operátorok halmazát, amelyek kielégíti a fenti $1-3$. feltételeket. Ekkor $\mathcal{S}_{t_0}^{DS}$ az A *Desch–Schappacher-perturbáicióit* tartalmazza.

3.23. Tétel. *Legyen A a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora az X Banach-téren. Ha $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{DS}$ valamely $t_0 > 0$ esetén, akkor az*

$$(A_{-1} + B)|_X, \quad D((A_{-1} + B)|_X) := \{x \in X : A_{-1}x + Bx \in X\}$$

egy erősen folytonos félcsoport generátora X-en.

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

A perturbált operátor által generált félcsoportra hasonló reprezentációk érvényesek, mint a korlátos perturbációk esetében.

3.24. Következmény. *Legyen A a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora az X Banach-téren, $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{DS}$ valamely $t_0 > 0$ esetén. Ekkor az $(A_{-1} + B)|_X$ operátor által generált $(S(t))_{t\geq 0}$ félcsoportra teljesül*

(a) a konstansvariációs formula, vagyis

$$S(t) = T(t) + \int_0^t T_{-1}(t-s)BS(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0, \tag{3.10}$$

ahol az integrál pontonként értendő az $x \in X$ vektorokra;

(b) a Dyson–Phillips-sorelőállítás, vagyis

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t), \quad t \in [0, t_0] \tag{3.11}$$

ahol $S_0(t) = T(t)$,

$$S_{n+1}(t) := V_B S_n(t) = \int_0^t T_{-1}(t-s) B S_n(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.12}$$

Itt a (3.11) sor $\mathscr{L}(X)$*-ben konvergens, míg a (3.12) integrál az* X *erős topológiájában van értelmezve.*

A következőkben kimondunk két állítást bizonyítás nélkül, amelyek arról szólnak, hogy a $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{DS}$ feltételt hogyan lehet ellenőrizni konkrét esetekben.

3.25. Következmény. *Legyen* A *a* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport generátora az* X *Banach-téren, és legyen* $B \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$*. Továbbá, tegyük fel, hogy léteznek* $t_0 > 0$ *és* $q \in [0,1)$ *számok, amelyekre*

1. $\int_0^{t_0} T_{-1}(t_0 - s) B f(s)\,\mathrm{d}s \in X$ *és*
2. $\left\| \int_0^{t_0} T_{-1}(t_0 - s) B f(s)\,\mathrm{d}s \right\| \leq q \|f\|_\infty$

minden $f \in C([0,t_0], X)$ *esetén. Ekkor* $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{DS}$*, következésképp* $(A_{-1} + B)|_X$ *egy erősen folytonos félcsoport generátora* X*-en.*

3.26. Következmény. *Legyen* A *a* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport generátora az* X *Banach-téren,* $B \in \mathcal{L}(X, X_{-1})$*. Továbbá, tegyük fel, hogy léteznek* $t_0 > 0$ *és* $p \in [1, \infty)$ *számok, amelyekre*

$$\int_0^{t_0} T_{-1}(t_0 - s) B f(s)\,\mathrm{d}s \in X$$

minden $f \in L^p([0,t_0], X)$ *esetén. Ekkor* $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{DS}$*, így* $(A_{-1} + B)|_X$ *egy erősen folytonos félcsoport generátora* X*-en.*

3.3.3. Miyadera–Voigt-perturbáció

Ebben az alpontban olyan perturbációkkal foglalkozunk, amelyek a 3.3. Következmény után szereplő (IE*) kontansvariációs formula általánosításán alapulnak, tehát valamilyen értelemben a Desch–Schappacher-féle perturbációk duálisai.

Kiindulási pontunk ismét a

$$\mathcal{X}_{t_0} := C\left([0,t_0], \mathcal{L}_s(X)\right)$$

függvénytér, amely olyan $F : [0, t_0] \to \mathscr{L}(X)$ függvényeket tartalmaz, amelyekre a $t \mapsto F(t)x$ leképezés minden $x \in X$ esetén folytonos, és a tér az

$$\|F\|_\infty := \sup_{s\in[0,t_0]} \|F(s)\|$$

normával Banach-tér. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren, és tekintsünk most egy $B \in \mathcal{L}(X_1, X)$ operátort. Definiáljuk a V_B^* *absztrakt Volterra-operátort* (ld. a 3.4. Definíciót) mint $V_B^* : \mathcal{X}_{t_0} \to \mathcal{X}_{t_0}$ operátort, amelyre

$$(V_B^* F)(t) := \int_0^t F(s)BT(t-s)\,\mathrm{d}s \in \mathcal{L}(X_1, X),$$

$F \in \mathcal{X}_{t_0}$, $0 \leq t \leq t_0$, és az integrál erős értelemben (pontonként) konvergál X_1-en. Tegyük fel, hogy minden $F \in \mathcal{X}_{t_0}$ esetén

1. az $(V_B^* F)(t) : X_1 \subset X \to X$ operátor kiterjeszthető egy $\overline{(V_B^* F)(t)} : X \to X$ korlátos operátorrá,
2. a $[0, t_0] \ni t \mapsto \overline{(V_B^* F)(t)}$ leképezés erősen folytonos X-en, tehát $V_B^* : \mathcal{X}_{t_0} \to \mathcal{X}_{t_0}$,
3. $\overline{V_B^*}$ korlátos operátor $\mathcal{X}_{t_0}$-on, és $\|\overline{V_B^*}\| < 1$.

3.27. Definíció. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport az X Banach-téren, és legyen $(A, D(A))$ a generátora. Ekkor definiálja

$$\mathcal{S}_{t_0}^{MV} := \{B \in \mathcal{L}(X_1, X) : \overline{V_B^*} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_{t_0}), \|\overline{V_B^*}\| < 1\}$$

az olyan operátorok halmazát, amelyek kielégíti a fenti $1-3$. feltételeket. Ekkor $\mathcal{S}_{t_0}^{MV}$ az A *Miyadera–Voigt-perturbációi*t tartalmazza.

Az alábbi perturbációs tétel a 3.23. Tétel analogonja.

3.28. Tétel. *Legyen A a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora az X Banach-téren. Ha $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{MV}$ valamely $t_0 > 0$ esetén, akkor az*

$$A + B, \quad D(A + B) = D(A)$$

operátor egy erősen folytonos félcsoport generátora X-en.

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

A Miyadera–Voigt-perturbációkra is érvényesek a korábban látott reprezentációk.

3.29. Következmény. *Legyen A a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora az X Banach-téren, $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{MV}$ valamely $t_0 > 0$ esetén. Ekkor az $A+B$ operátor által generált $(S(t))_{t\geq 0}$ félcsoportra teljesül*

(a) a konstansvariációs formula, vagyis

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t S(s)BT(t-s)x\,\mathrm{d}s, \quad t \geq 0,\ x \in D(A), \tag{3.13}$$

(b) a Dyson–Phillips-sorelőállítás, vagyis

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(V^n T)(t), \quad t \in [0, t_0], \tag{3.14}$$

ahol $V := \overline{V_B^*}$.

A következő állítás a konkrét példákban ellenőrizhető ún. Miyadera–Voigt-feltételről szól, amelyből következik, hogy $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{MV}$, tehát $A+B$ generátor.

3.30. Állítás. *Legyen A a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora az X Banach-téren, $B \in \mathcal{L}(X_1, X)$, amelyre valamely $q \in [0,1)$ esetén*

$$\int_0^{t_0} \|BT(s)x\|\,\mathrm{d}s \leq q\|x\|, \quad x \in D(A).$$

Ekkor $B \in \mathcal{S}_{t_0}^{MV}$, így $A+B$ egy erősen folytonos félcsoport generátora X-en.

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

3.4. Félcsoportok approximációja

Ha egy bonyolultabb operátort és az általa generált félcsoportot akarunk vizsgálni, akkor a perturbáció mellett a félcsoportok approximációjához nyúlhatunk. A 2.30. Hille–Yosida-tételben definiáltuk a korlátos operátorokból álló Yosida-approximációt mint az

$$A_n := nAR(n, A), \quad n \in \mathbb{N}$$

operátorokból álló sorozatot, amelyek az $(\mathrm{e}^{tA_n})_{t\geq 0}$ egyenletesen folytonos félcsoportokat generálják. Felhasználva, hogy $A_n \to A$ pontonként $D(A)$-n (ld. a 2.29. Lemma *(ii)* pontját) kapjuk, hogy a félcsoportok is konvergálnak, tehát

$$\mathrm{e}^{tA_n} \to T(t), \quad n \to \infty.$$

Ebben a fejezetben szisztematikusan fogjuk megvizsgálni, hogy hogyan függ össze a félcsoportok, generátoraik, ill. azok rezolvenseinek konvergenciája. A következő példák mutatják, hogy a kérdésfelvetés korántsem triviális.

3.31. Példa. Legyen $X = c_0$ a nullsorozatok tere, és tekintsük az

$$A(x_k) := (\mathrm{i}kx_k)$$

szorzásoperátort

$$D(A) := \{(x_k) \in c_0 : (\mathrm{i}kx_k) \in c_0\}$$

értelmezési tartománnyal. Az 1.35. Állítás alapján ismeretes, hogy $(A, D(A))$ egy erősen folytonos $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoportot generál, amelyre

$$T(t)(x_k) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}x_k), \quad t \geq 0.$$

Ha A-t perturbáljuk a

$$P_n(x_k) := (0, \ldots 0, nx_n, 0, \ldots)$$

korlátos operátorokkal, akkor az

$$A_n := A + P_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

operátorokat kapjuk. Ezek a 3.2. Tétel alapján egy-egy erősen folytonos $(T_n(t))_{t\geq 0}$ félcsoportot generálnak, és minden $x = (x_k) \in D(A)$ elem esetén

$$\|A_n x - Ax\| = \|P_n x\| = n|x_n| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Azonban a $(T_n(t))_{t\geq 0}$ félcsoportok nem konvergálnak, hiszen

$$T_n(t)(x_k) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}x_1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}x_2, \ldots, \mathrm{e}^{(\mathrm{i}n+n)t}x_n, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}x_{n+1}, \ldots),$$

tehát

$$\|T_n(t)\| \geq \mathrm{e}^{nt}, \quad n \in \mathbb{N},\ t \geq 0.$$

Ezért az egyenletes korlátosság tétele miatt létezik olyan $x \in X$, amelyre $(T_n(t)x)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergál.

3.32. Példa. Legyen $A_n := -n \cdot \mathrm{Id}$, egy $X \neq \{0\}$ Banach-téren. Ekkor az

$$R(\lambda, A_n) := \frac{1}{\lambda + n} \cdot \mathrm{Id}, \quad n \in \mathbb{N}$$

rezolvensoperátoroknak létezik limesze,

$$R(\lambda) := \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n),$$

amelyre $R(\lambda) \equiv 0$, tehát a limesz nem lehet rezolvensoperátor.

3.4.1. Pszeudorezolvensek

Ebben az alpontban operátorok olyan családjait vizsgáljuk, amelyek teljesítik a (4.3) rezolvensegyenlőséget.

3.33. Definíció. Legyen $\Lambda \subset \mathbb{C}$ számhalmaz, és tekintsünk egy $\mathcal{R}(\lambda) \in \mathscr{L}(X)$, $\lambda \in \Lambda$ operátorcsaládot. Azt mondjuk, hogy a $\{\mathcal{R}(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ operátorcsalád *pszeudorezolvens*, ha

$$\mathcal{R}(\lambda) - \mathcal{R}(\mu) = (\mu - \lambda)\mathcal{R}(\lambda)\mathcal{R}(\mu), \quad \lambda, \mu \in \Lambda. \tag{3.15}$$

A 3.32. Példában szereplő $\{R(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ limeszoperátorok (triviális) pszeudorezolvenst alkotnak, de mivel nem injektívek, ezért nem lehetnek rezolvensoperátorok. A következő állításban egy fontos példát látunk pszeudorezolvensre.

3.34. Állítás. *Legyenek az A_n, $n \in \mathbb{N}$ operátorok kontrakció-félcsoportok generátorai X-en, és tegyük fel, hogy valamely $\lambda_0 > 0$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} R(\lambda_0, A_n)x$$

létezik minden $x \in X$ elemre. Ekkor

$$R(\lambda)x := \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n)x, \quad x \in X$$

egy $\{R(\lambda) : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ pszeudorezolvenst definiál a jobb félsíkon.

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

Célunk – amely majd a félcsoport-approximációs tételek bizonyításában lényeges elem lesz –, hogy feltételeket találjunk arra, mikor lesz egy pszeudorezolvens valamely zárt operátor rezolvensoperátoraival egyenlő. Mielőtt azonban erre rátérnénk, a pszeudorezolvensek néhány fontos tulajdonságával ismerkedünk meg.

3.35. Lemma. *Legyen $\{\mathcal{R}(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ pszeudorezolvens X-en. Ekkor minden $\lambda, \mu \in \Lambda$ esetén*

(a) $\mathcal{R}(\lambda)\mathcal{R}(\mu) = \mathcal{R}(\mu)\mathcal{R}(\lambda)$*, vagyis az operátorok felcserélhetők;*

(b) $\ker \mathcal{R}(\lambda) = \ker \mathcal{R}(\mu)$*;*

(c) $\operatorname{ran} \mathcal{R}(\lambda) = \operatorname{ran} \mathcal{R}(\mu)$.

Bizonyítás. (a) Következik a (3.15) egyenletből.

(b) és

(c) Átírva a (3.15) egyenletet kapjuk, hogy

$$\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{R}(\mu)\,[\mathrm{Id} + (\mu - \lambda)\mathcal{R}(\lambda)] = [\mathrm{Id} + (\mu - \lambda)\mathcal{R}(\lambda)]\,\mathcal{R}(\mu).$$

Ebből adódik, hogy $\operatorname{ran} \mathcal{R}(\lambda) \subset \operatorname{ran} \mathcal{R}(\mu)$ és $\ker \mathcal{R}(\mu) \subset \ker \mathcal{R}(\lambda)$. A szimmetria miatt a fordított tartalmazások is teljesülnek. □

Tehát ha megköveteljük, hogy valamely $\lambda \in \Lambda$ esetén $\ker \mathcal{R}(\lambda) = \{0\}$ és $\operatorname{ran} \mathcal{R}(\lambda)$ sűrű legyen, akkor ez a pszeudorezolvens minden elemére igaz lesz. Az alábbi állítás azt mondja, hogy ilyen esetben az operátorcsalád valamely zárt, sűrűn definiált operátor rezolvensoperátorainak részhalmaza.

3.36. Állítás. *Legyen $\{\mathcal{R}(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ pszeudorezolvens X-en. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) Létezik egy $(A, D(A))$ zárt, sűrűn definiált operátor, amelyre $\Lambda \subset \rho(A)$ és $\mathcal{R}(\lambda) = R(\lambda, A)$ minden $\lambda \in \Lambda$ esetén.

(ii) $\ker \mathcal{R}(\lambda) = \{0\}$ *és* $\operatorname{ran} \mathcal{R}(\lambda)$ *sűrű X-ben valamely/minden $\lambda \in \Lambda$ esetén.*

Bizonyítás. Elég megmutatni a $(ii) \Rightarrow (i)$ irányt. Mivel $\mathcal{R}(\lambda)$ injektív, ezért definiálhatjuk valamely $\lambda_0 \in \Lambda$ esetén az

$$A := \lambda_0 - \mathcal{R}(\lambda_0)^{-1}$$

operátort, amely zárt lesz, és $D(A) = \operatorname{ran} \mathcal{R}(\lambda_0)$ sűrű. Ekkor

$$(\lambda_0 - A)\mathcal{R}(\lambda_0) = \mathrm{Id}$$

és

$$\mathcal{R}(\lambda_0)(\lambda_0 - A)x = x \quad \text{minden } x \in D(A) \text{ esetén.}$$

Tehát $\mathcal{R}(\lambda_0) = R(\lambda_0, A)$. Ha $\lambda \in \Lambda$ tetszőleges, akkor a (3.15) egyenlet alapján

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)\mathcal{R}(\lambda) &= [(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - A)]\mathcal{R}(\lambda) \\
&= [(\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - A)]\mathcal{R}(\lambda_0)[\mathrm{Id} - (\lambda - \lambda_0)\mathcal{R}(\lambda)] \\
&= \mathrm{Id} + (\lambda - \lambda_0)[\mathcal{R}(\lambda_0) - \mathcal{R}(\lambda) - (\lambda - \lambda_0)\mathcal{R}(\lambda)\mathcal{R}(\lambda_0)] \\
&= \mathrm{Id}\,.
\end{aligned}$$

Hasonlóan látható, hogy $\mathcal{R}(\lambda)(\lambda - A)x = x$ is teljesül minden $x \in D(A)$ esetén. Ebből következik, hogy $\mathcal{R}(\lambda) = R(\lambda, A)$ minden $\lambda \in \Lambda$ esetén, és adódik az is, hogy A definíciója nem függ λ_0 választásától. □

Az alábbiakban egy hasznos elégséges feltételt adunk arra, hogy mikor teljesül a fenti állítás (ii) pontja.

3.37. Következmény. *Legyen $\{\mathcal{R}(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ pszeudorezolvens X-en, és tegyük fel, hogy Λ tartalmaz egy $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemkorlátos sorozatot. Ha*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \mathcal{R}(\lambda_n)x = x \quad \textit{minden } x \in X\textit{-re,} \tag{3.16}$$

akkor $\{\mathcal{R}(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ egy zárt, sűrűn definiált operátor rezolvensoperátoraiból áll. A (3.16) feltétel fennáll például akkor, ha $\operatorname{ran} \mathcal{R}(\lambda)$ *sűrű X-ben és létezik olyan $M > 0$ konstans, hogy*

$$\|\lambda_n \mathcal{R}(\lambda_n)\| \le M \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N}\textit{-re.} \tag{3.17}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a (3.16) feltétel teljesül. Ekkor a 3.35. Lemma (c) pontja szerint tetszőleges $\lambda \in \Lambda$ esetén

$$X = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} \mathcal{R}(\lambda_n)} = \overline{\operatorname{ran} \mathcal{R}(\lambda)},$$

tehát $\operatorname{ran} \mathcal{R}(\lambda)$ sűrű. Másrészt, ha $x \in \ker \mathcal{R}(\lambda)$, akkor

$$x = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \mathcal{R}(\lambda_n)x = 0,$$

vagyis $\ker \mathcal{R}(\lambda) = \{0\}$ is igaz. Így az első állítás a 3.36. Állítás (ii) pontjából következik. A (3.17) becslés alapján

$$\|\mathcal{R}(\lambda_n)\| \le \frac{M}{|\lambda_n|}, \quad n \in \mathbb{N},$$

tehát $\|\mathcal{R}(\lambda_n)\| \to \infty$, $n \to \infty$. A (3.15) egyenlőség miatt tetszőleges $\mu \in \Lambda$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \|(\lambda_n \mathcal{R}(\lambda_n) - \mathrm{Id})\mathcal{R}(\mu)\| = 0,$$

vagyis ha $x \in \operatorname{ran} \mathcal{R}(\mu)$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \mathcal{R}(\lambda_n)x = x.$$

Mivel $\operatorname{ran} \mathcal{R}(\mu)$ sűrű a feltétel szerint, a (3.17) alapján pedig a $\lambda_n \mathcal{R}(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$ operátorok egyenletesen korlátosak, ezért a Banach–Steinhaus-tétel miatt (3.16) következik. $\square$

3.4.2. Approximációs tételek

Ebben az alpontban félcsoportok, generátoraik és azok rezolvenseinek pontonkénti konvergenciájával foglalkozunk.

Az első eredmény arról az esetről szól, amikor tudjuk, hogy a generátorok limesze is generátor.

3.38. Tétel (Első Trotter–Kato approximációs tétel, 1958–59)**.** *Legyenek* $(T(t))_{t\ge0}$ *és* $(T_n(t))_{t\ge0}$, $n \in \mathbb{N}$ *erősen folytonos félcsoportok* X*-en, amelyek generátorai* A *ill.* A_n, $n \in \mathbb{N}$. *Tegyük fel, hogy léteznek olyan* $M \ge 1$, $w \in \mathbb{R}$ *számok, amelyekre*

$$\|T(t)\|, \|T_n(t)\| \le M\mathrm{e}^{wt}, \quad t \ge 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Legyen D *az* A *lényeges része, és tekintsük az alábbi állításokat.*

(a) $D \subset D(A_n)$ *minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, és* $A_n x \to Ax$, $x \in D$.

(b) Minden $x \in D$ *esetén létezik olyan* $x_n \in D(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$ *sorozat, amelyre*

$$x_n \to x, \text{ és } A_n x_n \to Ax.$$

(c) $R(\lambda, A_n)x \to R(\lambda, A)x$, $n \to \infty$ *minden* $x \in X$ *és valamely/minden* $\lambda > w$ *esetén.*

(d) $T_n(t)x \to T(t)x$, $n \to \infty$ *minden* $x \in X$ *esetén, kompakt intervallumokon* t*-ben egyenletesen.*

Ekkor

$$(a) \Longrightarrow (b) \Longleftrightarrow (c) \Longleftrightarrow (d),$$

(b)*-ből általában nem következik* (a).

Bizonyítás. A bizonyítás elején átskálázás után feltesszük, hogy

$$\|T(t)\|, \|T_n(t)\| \leq M, \quad t \geq 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

$(a) \Rightarrow (b)$: Rögtön adódik, hiszen $x_n := x$, $n \in \mathbb{N}$ választható.
$(b) \Rightarrow (c)$: Legyen $\lambda > 0$. Mivel a 2.30. Hille–Yosida-tétel szerint

$$\|R(\lambda, A_n)\| \leq \frac{M}{\lambda}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ezért elég megmutatni, hogy

$$R(\lambda, A_n)y \to R(\lambda, A)y,$$

ha y eleme a $(\lambda - A)D$ sűrű altérnek. Legyen $x \in D$, és legyen $y := (\lambda - A)x$. A (b) feltétel szerint létezik olyan $x_n \in D(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat, amelyre

$$x_n \to x, \text{ és } A_n x_n \to Ax,$$

tehát

$$y_n := (\lambda - A_n)x_n \to y.$$

Így

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, A_n)y - R(\lambda, A)y\| &\leq \|R(\lambda, A_n)y - R(\lambda, A_n)y_n\| + \|R(\lambda, A_n)y_n - R(\lambda, A)y\| \\ &\leq \|R(\lambda, A_n)\| \cdot \|y - y_n\| + \|x_n - x\| \to 0, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

$(c) \Rightarrow (b)$: Legyen $x \in D$ tetszőleges és $\lambda > 0$ rögzített. Ekkor $x = R(\lambda, A)y$ alakú valamely $y \in X$ elemre, legyen $x_n := R(\lambda, A_n)y$. Így

$$A_n x_n = A_n R(\lambda, A_n)y = \lambda R(\lambda, A_n)y - y,$$

és

$$Ax = \lambda R(\lambda, A)y - y,$$

tehát $A_n x_n \to Ax$.
$(d) \Rightarrow (c)$: A 2.17. Tétel szerint minden $\lambda > 0$ és $x \in X$ esetén

$$\|R(\lambda, A)x - R(\lambda, A_n)x\| \leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\|T(t)x - T_n(t)x\| \,\mathrm{d}t.$$

Az állítás a Lebesgue-féle dominált konvergenciatételből adódik.
$(c) \Rightarrow (d)$: Meglehetősen hosszadalmas, technikai bizonyítás, amely a pszeudorezolvensek elméletét használja. Nem részletezzük.
Arra, hogy (b)-ből nem következik (a), létezik ellenpélda. □

A fenti tételben fel kellett tennünk, hogy az A limeszoperátor létezik és generátor. Az alkalmazásokban azonban leggyakrabban valamilyen módon közelíteni akarjuk A-t, és a közelítés tulajdonságaiból szeretnénk következtetni arra, hogy A generátor. Hasonlóan, az A által generált félcsoportot mint az A_n közelítő generátorok által generált félcsoportok limeszét szeretnénk megkapni. A következő tétel erről szól.

3.39. Tétel (Második Trotter–Kato approximációs tétel, 1958–59.)**.** *Legyenek* $(T_n(t))_{t\geq 0}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *erősen folytonos félcsoportok* X*-en, amelyek generátorai* A_n*,* $n \in \mathbb{N}$*. Tegyük fel, hogy léteznek olyan* $M \geq 1$*,* $w \in \mathbb{R}$ *számok, amelyekre*

$$\|T_n(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Legyen $\lambda_0 > w$*, és tekintsük az alábbi állításokat.*

(a) Létezik egy $(A, D(A))$ *sűrűn definiált operátor, amelyre* $A_n x \to Ax$ *minden* $x \in D$ *esetén, ahol* D *az* A *lényeges része. Továbbá,* $(\lambda_0 - A)D$ *sűrű* X*-ben.*

(b) Az $R(\lambda_0, A_n)$*,* $n \in \mathbb{N}$ *operátorok pontonként tartanak egy* $R \in \mathscr{L}(X)$ *operátorhoz, amelyre* $\operatorname{ran} R$ *sűrű* X*-ben.*

(c) *A* $(T_n(t))_{t\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ *félcsoportok pontonként (kompakt intervallumokon* t*-ben egyenletesen) konvergálnak egy* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoporthoz, amelynek generátora* B*, és* $R = R(\lambda_0, B)$ *(ahol* R *a (b)-beli operátor).*

Ekkor

$$(a) \Rightarrow (b) \Longleftrightarrow (c),$$

és ha (a) *fennáll, akkor* $B = \overline{A}$.

Bizonyítás. A bizonyítás elején átskálázás után feltesszük, hogy

$$\|T_n(t)\| \leq M, \quad t \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

$(a) \Longrightarrow (b)$: Mint a fenti bizonyításban, elegendő a konvergenciát $(R(\lambda_0, A_n)y)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra bizonyítani, ahol $y = (\lambda_0 - A)x$, $x \in D$. Ez pedig azért teljesül, mert

$$\begin{aligned} R(\lambda_0, A_n)y &= R(\lambda_0, A_n)[(\lambda_0 - A_n)x - (\lambda_0 - A_n)x + (\lambda_0 - A)x] \\ &= x + R(\lambda_0, A_n)(A_n x - Ax) \to x = Ry, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Továbbá, $\operatorname{ran} R$ tartalmazza D-t, tehát sűrű X-ben.
$(b) \Rightarrow (c)$: A 3.34. Állítás miatt a feltételből következik, hogy az

$$R(\lambda)x := \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n)x, \quad x \in X$$

módon definiált $\{R(\lambda) : \lambda > 0\}$ operátorok léteznek, és pszeudorezolvenst alkotnak. Továbbá, a 2.30. Hille–Yosida-tétel miatt $\|\lambda R(\lambda, A_n)\| \leq M$, $\lambda > 0$, ezért

$$\|\lambda R(\lambda)\| \leq M, \quad \lambda > 0.$$

Mivel $R(\lambda)^k = \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_n)^k$ minden $k \in \mathbb{N}$ természetes számra, ezért

$$\|\lambda^k R(\lambda)^k\| \leq M, \quad \lambda > 0,\ k \in \mathbb{N}$$

is teljesül. A feltétel szerint $\operatorname{ran} R(\lambda) = \operatorname{ran} R(\lambda_0) = \operatorname{ran} R$, így $\operatorname{ran} R(\lambda)$ sűrű X-ben (minden $\lambda > 0$ esetén). Tehát a 3.37. Következményből adódik, hogy létezik egy $(B, D(B))$ zárt, sűrűn definiált operátor, amelyre $R(\lambda) = R(\lambda, B)$, $\lambda > 0$. Az eddigiek alapján B-re teljesül a 2.30. Hille–Yosida-tétel feltételeinek megfelelő

$$\|\lambda^k R(\lambda, B)^k\| \leq M, \quad \lambda > 0,\ k \in \mathbb{N}$$

becslés, ezért B egy $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoportot generál X-en. Így alkalmazhatjuk a 3.38. Első Trotter–Kato-tétel $(c) \Rightarrow (d)$ következtetését, miszerint a $(T_n(t))_{t\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$ félcsoportok a kívánt módon tartanak $(T(t))_{t\geq 0}$-hez.
$(c) \Rightarrow (b)$: A 3.38. Első Trotter–Kato-tétel alapján adódik.
Végül megmutatjuk, hogy ha (a) fennáll, akkor $B = \overline{A}$. Mivel $R(\lambda_0, B) = R$, ezért

$$R(\lambda_0, B)(\lambda_0 - A)x = \lim_{n\to\infty} R(\lambda_0, A_n)(\lambda_0 - A_n)x = x, \quad x \in D.$$

Mivel D az $\overline{A}$-nak is lényeges része, ezért

$$R(\lambda_0, B)(\lambda_0 - \overline{A})x = x, \quad x \in D(\overline{A})$$

is teljesül. Ebből következik, hogy λ_0 nem approximatív sajátértéke $\overline{A}$-nak (ld. a 4.6. Definíciót). Továbbá, mivel $\operatorname{ran}(\lambda_0 - A)$ sűrű X-ben, ezért λ_0 nem lehet reziduális spektrumpontja sem $\overline{A}$-nak (ld. a 4.9. Definíciót). Így szükségképpen $\lambda_0 \in \rho(\overline{A})$ (ld. a (4.7) egyenlőséget), és $R(\lambda_0, B) = R(\lambda_0, \overline{A})$, tehát $B = \overline{A}$ következik. $\square$

A Második Trotter–Kato-tétel különösen nagy jelentőségű az alkalmazásokban: alapját képezi számos numerikus és operátorelméleti approximációs sémának. A következő alpontban néhány ilyen példát nézünk meg.

3.4.3. Példák

A Trotter–Kato-tételek bizonyítának egyik fő eszköze a Hille–Yosida-tétel volt. Megfordítva, a Hille–Yosida-tételt egy approximációs séma segítségével bizonyítottuk.

3.40. Példa (Yosida-approximáció)**.** Legyen $(A, D(A))$ egy olyen operátor, amely a 2.30. Hille–Yosida-tétel (kontrakciós eset) (ii) feltételeit kielégíti. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén definiálhatjuk az

$$A_n := nAR(n, A) \in \mathscr{L}(X)$$

Yosida-approximációt. A 2.29. Lemma alapján az $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $D(A)$-n pontonként tart A-hoz. Mivel a feltétel szerint $\lambda - A$ szürjektív, ezért alkalmazhatjuk a 3.39. Második Trotter–Kato-tételt, és kapjuk, hogy létezik egy $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport, amelyre

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{tA_n}x, \quad x \in X,$$

és a félcsoport generátora A. Ez természetesen egy „farkába harapó kígyó” érvelés.

A következő példában egy klasszikus tétel bizonyítunk újra.

3.41. Példa (Weierstrass approximációs tétel)**.** Tekintsük az $X := C_0(\mathbb{R})$ vagy $X = C_{\mathrm{ub}}(\mathbb{R})$ teret, és a rajta értelmezett baleltolás-félcsoportot:

$$(T(t)f)(s) := f(s+t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Ennek generátora

$$Af = f', \quad D(A) = \{f \in X : f' \in X\},$$

ld. a 2.2.2. alpontot. Definiálja az A_n, $n \in \mathbb{N}$ korlátos operátorokat

$$A_n := \frac{T({}^1\!/\!{}_n) - \mathrm{Id}}{{}^1\!/\!{}_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor az A_n, $n \in \mathbb{N}$ operátorokra az alábbiak teljesülnek:

1. kommutálnak a $T(t)$ operátorokkal;

2. kontrakció-félcsoportokat generálnak, hiszen

$$\|\mathrm{e}^{tA_n}\| = \|\mathrm{e}^{nt(T({}^1\!/\!{}_n)-\mathrm{Id})}\| \leq \mathrm{e}^{-nt}\mathrm{e}^{nt\|T({}^1\!/\!{}_n)\|} = 1;$$

3. a derivált definíciója alapján

$$A_n f \to Af, \quad f \in D(A).$$

Így a 3.38. Első Trotter–Kato-tétel alapján

$$f(s+t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A_n^k f)(s)$$

minden $f \in X$ esetén, az $s \in \mathbb{R}$ és $t \in [0,1]$ számokra egyenletesen. Legyen most $s = 0$. Egy alkalmasan választott részsorozatra való áttérés után feltehető, hogy

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A_n^k f)(0) - f(t)\right| < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

teljesül minden $t \in [0,1]$ számra. Most válasszuk meg az $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ természetes számokból álló sorozatot úgy, hogy

$$\left|\sum_{k=0}^{m_n} \frac{t^k}{k!}(A_n^k f)(0) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A_n^k f)(0)\right| < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

legyen minden $t \in [0,1]$ pontban. Ez megtehető, hiszen a hatványfüggvényekből képezett végtelen sor is egyenletesen konvergens a $[0,1]$ intervallumon. Ekkor a

$$\sum_{k=0}^{m_n} \frac{t^k}{k!}(A_n^k f)(0), \quad n \in \mathbb{N}$$

polinomokból álló sorozatra

$$\left| \sum_{k=0}^{m_n} \frac{t^k}{k!}(A_n^k f)(0) - f(t) \right| < \frac{2}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

teljesül minden $t \in [0,1]$ esetén, így következményként a jól ismert Weierstrass approximációs tételt kapjuk.

3.42. Állítás. *Minden $f \in X$ esetén létezik egy $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ természetes számokból álló sorozat, amelyre*

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{t^k}{k!}(A_n^k f)(0),$$

ahol a limesz $[0,1]$-en egyenletes.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy hogyan kaphatunk többé-kevésbé explicit formulákat az approximált félcsoportra. Ehhe szükségünk lesz az alábbi lemmára.

3.43. Lemma. *Legyen $S \in \mathscr{L}(X)$, amelyre $\|S^m\| \leq M$ teljesül valamely $M \geq 1$ és minden $m \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor*

$$\left\| \mathrm{e}^{n(S-\mathrm{Id})}x - S^n x \right\| \leq \sqrt{n} M \|Sx - x\|, \quad x \in X, \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzítve. Ekkor

$$\mathrm{e}^{n(S-\mathrm{Id})} - S^n = \mathrm{e}^{-n}(\mathrm{e}^{nS} - \mathrm{e}^n S^n) = \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}(S^k - S^n).$$

Legyen $k > n$, ekkor

$$S^k - S^n = \sum_{j=n}^{k-1} (S^{j+1} - S^j) = \sum_{j=n}^{k-1} S^j (S - \mathrm{Id}),$$

és hasonló teleszkópikus összeg írható fel $k < n$ esetén is. Így, mivel $\|S^m\| \leq M$, kapjuk, hogy

$$\|S^k x - S^n x\| \leq |n-k| \cdot M \|Sx - x\|, \quad k \in \mathbb{N}, x \in X.$$

Ennek segítségével az alábbi becsléssorozatot nyerjük

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{e}^{n(S-\mathrm{Id})}x - S^n x\right\| &\le \mathrm{e}^{-n} M\|Sx - x\| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n^k}{k!}\right)^{1/2} \left(\frac{n^k}{k!}\right)^{1/2} |n-k| \\
&\le \mathrm{e}^{-n} M\|Sx - x\| \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}(n-k)^2\right)^{1/2} \\
&= \mathrm{e}^{-n} M\|Sx - x\| \cdot (\mathrm{e}^n)^{1/2} (n\mathrm{e}^n)^{1/2} \\
&= \sqrt{n} M\|Sx - x\|.
\end{aligned}$$

A 2. sorban felhasználtuk a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget, a 3-dikban pedig, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}(n-k)^2 = n\mathrm{e}^n.$$

□

A fent igazolt lemmma és a Második Trotter–Kato-tétel segítségével kapjuk az alfejezet egyik legfontosabb eredményét.

3.44. Tétel (Chernoff-szorzatformula)**.** *Tekintsünk egy*

$$V : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{L}(X)$$

függvényt, amelyre $V(0) = \mathrm{Id}$, *és amelyhez létezik olyan* $M \ge 1$ *konstans, hogy*

$$\|[V(t)]^m\| \le M$$

minden $t \ge 0$, $m \in \mathbb{N}$ *esetén. Tegyük fel, hogy az*

$$Ax := \lim_{h \downarrow 0} \frac{V(h)x - x}{h}$$

limesz létezik minden $x \in D \subset X$ *elemre, ahol* D *és* $(\lambda_0 - A)D$ *sűrű alterek* X*-ben valamely* $\lambda_0 > 0$ *esetén. Ekkor* $\overline{A}$ *egy* $(T(t))_{t\ge 0}$ *erősen folytonos félcsoportot generál, amelyre*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} [V(t/n)]^n x, \quad x \in X, \tag{3.19}$$

és a limesz $[0, t_0]$*-on egyenletes.*

Bizonyítás. Minden $s > 0$ számra definiáljuk a

$$A_s := \frac{V(s) - \mathrm{Id}}{s} \in \mathscr{L}(X)$$

operátort. Ekkor $A_s x \to Ax$ minden $x \in D$ esetén, ha $s \downarrow 0$. Továbbá, az $(\mathrm{e}^{tA_s})_{t\geq 0}$ félcsoportokra

$$\|\mathrm{e}^{tA_s}\| \leq \mathrm{e}^{-\,{}^{t}\!/\!_{s}}\|\mathrm{e}^{tV(s)/s}\| \leq \mathrm{e}^{-\,{}^{t}\!/\!_{s}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m \|[V(s)]^m\|}{s^m m!} \leq M, \quad t \geq 0. \tag{3.20}$$

Ezek alapján a 3.39. Második Trotter–Kato-tétel feltételei teljesülnek (ha a folytonos $s > 0$ paraméter helyett $n \in \mathbb{N}$ diszkrét paraméterre térünk át). Tehát $\overline{A}$ egy $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoportot generál, amelyre

$$\|T(t)x - \mathrm{e}^{tA_s}x\| \to 0, \quad x \in X, \text{ ha } s \downarrow 0$$

$[0, t_0]$-on egyenletesen. Ezért

$$\|T(t)x - \mathrm{e}^{tA_{t/n}}x\| \to 0, \quad x \in X, \text{ ha } n \to \infty \tag{3.21}$$

$[0, t_0]$-on egyenletesen. Másrészt, a 3.43. Lemma szerint

$$\begin{aligned} \left\|\mathrm{e}^{tA_{t/n}}x - [V({}^{t}\!/\!_{n})]^n x\right\| &= \left\|\mathrm{e}^{n(V({}^{t}\!/\!_{n})-\mathrm{Id})}x - [V({}^{t}\!/\!_{n})]^n x\right\| \\ &\leq \sqrt{n} M \|V({}^{t}\!/\!_{n})x - x\| \\ &= \frac{tM}{\sqrt{n}} \|A_{t/n}x\| \to 0, \quad n \to \infty, \end{aligned} \tag{3.22}$$

ha $x \in D$, $(0, t_0]$-on egyenletesen. Mivel D sűrű és a (3.20) becslés, valamint feltétel szerint

$$\left\|\mathrm{e}^{tA_{t/n}} - [V({}^{t}\!/\!_{n})]^n\right\| \leq 2M,$$

így az 1.51. Lemma (*ii*) pontja alapján a (3.22) konvergencia minden $x \in X$ esetén fennáll. Ezért a (3.21) és a (3.22) határátmenetek felhasználásával

$$\|T(t)x - [V({}^{t}\!/\!_{n})]^n x\| \leq \|T(t)x - \mathrm{e}^{tA_{t/n}}x\| + \left\|\mathrm{e}^{tA_{t/n}}x - [V({}^{t}\!/\!_{n})]^n x\right\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.23}$$

ha $x \in X$, $[0, t_0]$-on egyenletesen. □

Átskálázással bizonyíthatjuk a Chernoff-szorzatformulát nemkorlátos esetre is.

3.45. Következmény. *Tekintsünk egy*

$$V : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{L}(X)$$

függvényt, amelyre $V(0) = \mathrm{Id}$, *és léteznek olyan* $M \geq 1$, $w \in \mathbb{R}$ *konstansok, hogy*

$$\|[V(t)]^k\| \leq M\mathrm{e}^{kwt}, \quad t \geq 0, k \in \mathbb{N}.$$

Tegyük fel, hogy az

$$Ax := \lim_{h\downarrow 0} \frac{V(h)x - x}{h}$$

limesz létezik minden $x \in D \subset X$ *elemre, ahol* D *és* $(\lambda_0 - A)D$ *sűrű alterek* X*-ben valamely* $\lambda_0 > w$ *esetén. Ekkor* $\overline{A}$ *egy* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoportot generál, amelyre*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} [V({}^{t}\!/\!_{n})]^n x, \quad x \in X,$$

és a limesz $[0, t_0]$*-on egyenletes. Továbbá,*

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Bizonyítás. A $V(\cdot)$ függvény helyett tekintsük a

$$\widetilde{V}(t) := \mathrm{e}^{-wt}V(t)$$

függvényt, amelyre

$$\|[\widetilde{V}(t)]^k\| \leq M, \quad t \geq 0, k \in \mathbb{N}$$

teljesül. Ennek 0-beli deriváltja $A - w$, így az állítás következik a 3.44. Tételből. □

A Chernoff-szorzatformula következő alkalmazásával explicit formulát nyerünk a félcsoportnak a rezolvenssel való kifejezésére. Így teljessé válik a 2.1. ábra, megkapjuk a hiányzó nyilat, továbbá, megismerjük Hille eredeti bizonyítását a 2.30. Tételre.

3.46. Következmény (Post–Widder inverziós formula)**.** *Legyen* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport* X*-en, amelynek generátora* $(A, D(A))$. *Ekkor*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right]^n x = \lim_{n\to\infty} \left[\mathrm{Id} - \frac{t}{n}A\right]^{-n} x, \quad x \in X \tag{3.24}$$

kompakt intervallumokon t*-ben egyenletesen. A fenti előállítást* Post–Widder inverziós formulá*nak hívjuk.*

$$
\begin{tikzcd}
& (T(t))_{t\geq 0} \arrow[dl, shift right, "Ax=\lim\limits_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}"'] \arrow[dr, shift left, "R(\lambda,A)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,dt,\ \mathrm{Re}(\lambda)>\omega_0"] \arrow[d, phantom, "T(t)=\lim\limits_{n\to\infty}[{}^n\!/\!_t R({}^n\!/\!_t,A)]^n"] & \\
(A,D(A)) \arrow[ur, shift right, "\text{egyértelmű}"'] \arrow[rr, shift left, "R(\lambda,A)=(\lambda-A)^{-1}"] & & (R(\lambda(A)))_{\lambda\in\rho(A)} \arrow[ul, shift left] \arrow[ll, shift left, "A=\lambda-R(\lambda,A)^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

3.3. ábra. Félcsoport, generátor, rezolvens

Bizonyítás. Legyen $M \geq 1$, $w > 0$ olyan, hogy $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt}$, $t \geq 0$. Definiáljuk valamely $\delta \in (0, {}^1\!/\!_w)$ pozitív számra

$$V(t) := \begin{cases} \mathrm{Id}, & t = 0, \\ \frac{1}{t}R(\frac{1}{t}, A), & t \in (0, \delta), \\ 0, & t \geq \delta. \end{cases}$$

A kapott $V : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{L}(X)$ függvényre a 2.33. Tétel alapján

$$\|V(t)^k\| \leq {}^1\!/\!_{t^k}\|R({}^1\!/\!_t, A)^k\| \leq \frac{M}{t^k(1/t - w)^k} = \frac{M}{(1 - wt)^k} \leq M\mathrm{e}^{k(w+1)t},$$

ha $t \in (0, \frac{1}{w+w^2})$. Továbbá, a 2.29. Lemma szerint

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{V(t)x - x}{t} = \lim_{t\downarrow 0} {}^1\!/\!_t R({}^1\!/\!_t, A)Ax = Ax, \quad x \in D(A).$$

Így a 3.45. Következmény alkalmazásával éppen a kívánt formulát kapjuk. $\square$

Ezzel az eredménnyel tehát kiegészíthetjük a korábbi diagramot, és megkapjuk az összes összefüggést a félcsoport, a generátora és annak rezolvensei között, ld. a 3.3. ábrát.

Szintén a Chernoff-szorzatformula alkalmazásával juthatunk a perturbált félcsoport egy limeszelőállításához.

3.47. Következmény (Trotter-szorzatformula)**.** *Legyenek* $(T(t))_{t\geq 0}$ *és* $(S(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoportok* X*-en, amelyeknek generátorai* $(A, D(A))$ *ill.* $(B, D(B))$*. Tegyük fel, hogy a félcsoportok kielégítik a*

$$\|[T(t/n)S(t/n)]^n\| \leq M\mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq 0, n \in \mathbb{N}$$

stabilitási feltételt valamely $M \geq 1$*,* $w \in \mathbb{R}$ *számokra. Legyenek* $D := D(A) \cap D(B)$ *és* $(\lambda_0 - A - B)D$ *sűrű alterek valamely* $\lambda_0 > w$ *esetén. Ekkor* $C := \overline{A+B}$ *egy* $(U(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoportot generál* X*-en, amely a* Trotter-szorzatformulá*val adható meg:*

$$U(t)x = \lim_{n\to\infty} [T(t/n)S(t/n)]^n x, \quad x \in X,$$

ahol a konvergencia kompakt intervallumokon t*-ben egyenletes.*

Bizonyítás. Legyen

$$V(t) := T(t)S(t), \quad t \geq 0,$$

és vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow 0} \frac{V(t)y - y}{t} &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)S(t)y - y}{t} = \lim_{t\downarrow 0} T(t)\frac{S(t)y - y}{t} + \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)y - y}{t} \\ &= By + Ay,\end{aligned}$$

ha $y \in D$. Ezért V-re és $A+B$-re alkalmazható a 3.45. Következmény, így a kívánt formulát kapjuk. □

Megjegyezzük, hogy a Trotter–Kato- és a Chernoff-tételeknek még számos fontos alkalmazása létezik, például igazolható a $[0,1]$-en értelmezett folytonos függvények közelítése az ún. Bernstein-polinomokkal.

3.5. Feladatok

3.1. Feladat. Legyen A egy zárt lineáris operátor az X Banach-téren, amelynek $\rho(A)$ rezolvenshalmaza nem üres. Legyen $B : D(A) \to X$ lineáris operátor, ekkor bizonyítsuk be az alábbi állításokat!

(a) B pontosan akkor A-korlátos, ha $B \in \mathcal{L}(X_1, X)$, ami pontosan akkor teljesül, ha $BR(\lambda, A) \in \mathscr{L}(X)$ valamely/minden $\lambda \in \rho(A)$ esetén.

(b) B pontosan akkor A-kompakt, ha $BR(\lambda, A)$ kompakt valamely/minden $\lambda \in \rho(A)$ esetén.

3.2. Feladat. Legyen $Af := f''$ és $Bf := f'$ az $X = C_0(\mathbb{R})$ téren értelmezve, ahol $D(A)$ és $D(B)$ maximális értelmezési tartományok. Mutassuk meg, hogy $A + \alpha B - \beta$ kontrakció-félcsoportot generál, ha $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$. Lehet α és β helyére függvényeket írni?

3.3. Feladat. Legyen B olyan zárt lineáris operátor az X Banach-téren, amelyhez létezik $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \rho(B)$ sorozat, hogy $\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, B)\| = 0$. Igazoljuk, hogy B $A = B^2$-korlátos, és A-korlátja $a_0 = 0$! (Segítség: Számítsuk ki $B^2 R(\lambda, B)$-t a $BR(\lambda, B) = \lambda R(\lambda, B) - \mathrm{Id}$ egyenlőség segítségével!)

3.4. Feladat. Tekintsük az $Af := f''$ operátort az $X = C_0(\mathbb{R})$ téren, maximális értelmezési tartománnyal. Definiáljuk $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$A_n f(s) := n^2 \left[f(s + 1/n) - 2f(s) + f(s - 1/n) \right], \quad s \in \mathbb{R}, f \in X.$$

Igazoljuk az alábbiakat!

(a) $(A, D(A))$ zárt, sűrűn definiált operátor;

(b) $\|\mathrm{e}^{tA_n}\| \leq 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és $A_n f \to Af$, $n \to \infty$, ha $f \in D(A)$;

(c) Minden $g \in X$ függvényhez létezik egyetlen $f \in D(A)$, amelyre $f - f'' = g$;

(d) $(A, D(A))$ egy $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoportot generál X-en, amelyre

$$T(t)f(s) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-2n^2 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^2 t)^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} f(s + (k-2\ell)/n),$$

$s \in \mathbb{R}$, $f \in X$.

3.5. Feladat. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport X-en, amelynek generátora $(A, D(A))$. Bizonyítsuk be, hogy ha $B \in \mathscr{L}(X)$, akkor az $A+B$ által generált $(S(t))_{t\geq 0}$ félcsoportot a következő Trotter-szorzatformula adja meg:

$$S(t)x := \lim_{n\to\infty} \left[T(t/n)\mathrm{e}^{tB/n}\right]^n x, \quad t \geq 0, x \in X.$$

(Segítség: Átskálázás után feltehető, hogy $(T(t))_{t\geq 0}$ kontrakció-félcsoport.)

4. fejezet

Félcsoportok és generátorok spektrálelmélete

4.1. Zárt operátorok spektrálelmélete

Felidézzük, amit korábban zárt operátorok rezolvenséről tanultunk (ld. a 2.13. Definíciót és a 2.14. Állítást). Az alábbiakban $(A, D(A))$ mindig egy tetszőleges zárt operátort jelöl.

4.1. Definíció. Legyen

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ bijektív}\}$$

az A operátor *rezolvenshalmaza*, a komplementere pedig $\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ az A *spektruma*. Ha $\lambda \in \rho(A)$, akkor

$$R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$$

a Zártgráf-tétel (ld. a 2.8. Tételt) miatt korlátos X-en, és A *rezolvens*ének nevezzük a λ pontban.

A definícióból rögtön adódik, hogy

$$AR(\lambda, A) = \lambda R(\lambda, A) - \mathrm{Id} \tag{4.1}$$

egyenlőség fennáll. A következő egyenlőség a rezolvensoperátorok és a

$$\rho(A) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, A) \in \mathscr{L}(X) \tag{4.2}$$

rezolvensleképezés sok fontos tulajdonságának alapja.

4.2. Tétel (Rezolvensegyenlőség)**.** *Legyen* $\lambda, \mu \in \rho(A)$*. Ekkor*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A). \tag{4.3}$$

Bizonyítás. A rezolvens definíciójából adódik, hogy

$$\begin{aligned}
[\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A)]R(\mu, A) &= R(\mu, A) \\
R(\lambda, A)[\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A)] &= R(\lambda, A).
\end{aligned}$$

Kivonva egymásból a két egyenlőséget, és felhasználva, hogy a rezolvensoperátorok kommutálnak, kapjuk a kívánt állítást. □

A következő állításban a rezolvenshalmaz és a rezolvensleképezés alapvető tulajdonságait foglaljuk össze.

4.3. Állítás. *Legyen* $A : D(A) \subset X \to X$ *zárt operátor. Ekkor a következő állítások teljesülnek.*

(a) A rezolvenshalmaz nyílt $\mathbb{C}$*-ben, és ha* $\mu \in \rho(A)$*, akkor minden* $\lambda \in \mathbb{C}$*,* $|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu,A)\|}$ *esetén* $\lambda \in \rho(A)$*, továbbá*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}. \tag{4.4}$$

(b) A $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ *rezolvensleképezés lokálisan analitikus, és*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

(c) Legyen $(\lambda_n) \subset \rho(A)$*,* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$*. Ekkor* $\lambda_0 \in \sigma(A)$ *pontosan akkor teljesül, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, A)\| = \infty.$$

Bizonyítás. (a) és

(b) A 2.19. Következményben bizonyítottuk.

(c) Az (a) pontból következik, hogy minden $\mu \in \rho(A)$ esetén

$$\|R(\mu, A)\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\mu, \sigma(A))}. \tag{4.6}$$

Ha tehát $\lambda_0 \in \sigma(A)$, akkor

$$\frac{1}{\|R(\lambda_n, A)\|} \leq |\lambda_n - \lambda_0| \to 0,$$

tehát $\|R(\lambda_n, A)\| \to \infty$ következik. A másik irány bizonyításához indirekt tegyük fel, hogy $\lambda_0 \in \rho(A)$. Ekkor a $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ kompakt halmazon a folytonos rezolvensleképezés korlátos. Ez ellentmond annak, hogy $\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, A)\| = \infty$, tehát $\lambda_0 \in \sigma(A)$. □

A következőkben a $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ zárt halmaz szerkezetét vizsgáljuk meg közelebbről.

4.4. Definíció. Legyen $A : D(A) \subset X \to X$ zárt operátor, ekkor a

$$P\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ nem injektív}\}$$

halmaz az A *pontspektruma*. A $\lambda \in P\sigma(A)$ szám neve *sajátérték*, és egy $0 \neq x \in D(A)$, $(\lambda - A)x = 0$ tulajdonságú vektort a λ-hoz tartozó *sajátvektor*nak hívunk.

4.5. Példa. Legyen $\Omega \subset \mathbb{C}$ nem üres, zárt részhalmaz. Tekintsük az $X := C_0(\Omega)$ téren az

$$Mf(\lambda) := \lambda \cdot f(\lambda), \quad \lambda \in \Omega, f \in X$$

szorzásoperátort. Ekkor az 1.33. Állítás (d) pontja alapján

$$\sigma(M) = \Omega.$$

Másrészt, meggondolható, hogy

$$P\sigma(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ izolált } \Omega\text{-ban}\}.$$

A következő definíció a spektrumnak egy, a sajátértékeknél bővebb részhalmazáról szól.

4.6. Definíció. Legyen $A : D(A) \subset X \to X$ zárt operátor, ekkor az

$$A\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ nem injektív vagy } \operatorname{ran}(\lambda - A) \text{ nem zárt } X\text{-ben}\}$$

halmaz neve: *A approximatív pontspektruma* vagy *approximatív sajátértékei*.

A definíciókból adódik, hogy

$$P\sigma(A) \subset A\sigma(A).$$

Az alábbi lemma magyarázatot ad az „approximatív pontspektrum” elnevezésre.

4.7. Lemma. *Legyen $A : D(A) \subset X \to X$ zárt operátor, $\lambda \in \mathbb{C}$. Ekkor $\lambda \in A\sigma(A)$ pontosan akkor teljesül, ha létezik egy $(x_n) \subset D(A)$ sorozat, amelyre*

$$\|x_n\| = 1,\ n \in \mathbb{N} \text{ és } \lim_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0.$$

Egy ilyen (x_n) sorozatot a (λ-hoz tartozó) approximatív sajátvektor*nak nevezünk.*

Bizonyítás. Ha $\lambda - A$ nem injektív, akkor $x_n = \frac{x}{\|x\|}$ $(n \in \mathbb{N})$ választás jó, ahol x a λ-hoz tartozó tetszőleges sajátvektor. Ezért elég azt az esetet meggondolni, amikor $\lambda - A$ injektív. Ekkor

$$\lambda \in A\sigma(A) \iff \operatorname{ran}(\lambda - A) \text{ nem zárt.}$$

Az utóbbi feltétel a 2.8. Zártgráf-tétel alapján ekvivalens azzal, hogy

$$(\lambda - A)^{-1} : X \to X \text{ nem korlátos,}$$

ami pedig épp a lemma állításában szereplő sorozat létezését jelenti. □

Míg a pontspektrum lehet üres halmaz, az approximatív pontspektrum sosem az, kivéve, ha $\sigma(A) = \emptyset$ vagy $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

4.8. Állítás. *Legyen $A : D(A) \subset X \to X$ zárt operátor. Ekkor a $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ halmaz topológiai határa*

$$\partial\sigma(A) \subset A\sigma(A).$$

Bizonyítás. Legyen $\lambda_0 \in \partial\sigma(A) \subset \sigma(A)$. Ekkor létezik olyan $(\lambda_n) \subset \rho(A)$ sorozat, amelyre $\lambda_n \to \lambda_0$. A 4.3. Állítás (c) pontja és az egyenletes korlátosság tétele szerint létezik olyan $x \in X$ vektor, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, A)x\| = \infty.$$

Legyen

$$y_n := \frac{R(\lambda_n, A)x}{\|R(\lambda_n, A)x\|} \in D(A).$$

Ekkor $\|y_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, és

$$(\lambda_0 - A)y_n = (\lambda_0 - \lambda_n)y_n + (\lambda_n - A)y_n \to 0$$

miatt az (y_n) sorozat egy λ_0-hoz tartozó approximatív sajátvektora A-nak. így az állítás következik. □

A következő definíció a spektrum „maradék" részéről szól.

4.9. Definíció. Az

$$R\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{ran}(\lambda - A) \text{ nem sűrű } X\text{-ben}\}$$

halmaz neve: *A reziduális spektruma.*

Mivel a 4.6. és a 4.9. Definíciókban minden lehetőséget számba vettünk, amikor $\lambda - A$ *nem* bijektív, ezért könnyen látható, hogy

$$\sigma(A) = A\sigma(A) \cup R\sigma(A). \tag{4.7}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti unió nem szükségképpen diszjunkt.

Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy a zárt (nem feltétlenül korlátos) A operátor és a korlátos rezolvensoperátor spektrumai között szép összefüggés áll fenn, amelyet spektrálleképezés-tételnek is szoktak hívni.

4.10. Tétel (Spektrálleképezés-tétel a rezolvensre)**.** *Legyen $A : D(A) \subset X \to X$ zárt operátor, $\rho(A) \neq \emptyset$. Ekkor*

(a) minden $\lambda_0 \in \rho(A)$ esetén

$$\sigma(R(\lambda_0, A)) \setminus \{0\} = (\lambda_0 - \sigma(A))^{-1} = \left\{ \frac{1}{\lambda_0 - \mu} : \mu \in \sigma(A) \right\}. \tag{4.8}$$

(b) Hasonló állítás igaz a pont-, approximatív pont- és reziduális spektrumokra is.

Bizonyítás. Legyen $0 \neq \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda_0 \in \rho(A)$. Ekkor

$$\begin{aligned}(\mu - R(\lambda_0, A))\, x &= \mu\Big[\Big(\lambda_0 - \frac{1}{\mu}\Big) - A\Big] R(\lambda_0, A)x, \quad x \in X\\ &= \mu R(\lambda_0, A)\Big[\Big(\lambda_0 - \frac{1}{\mu}\Big) - A\Big]x, \quad x \in D(A).\end{aligned}$$

A fenti egyenlőségek alapján

$$\ker(\mu - R(\lambda_0, A)) = \ker\Big[\Big(\lambda_0 - \frac{1}{\mu}\Big) - A\Big]$$

és

$$\operatorname{ran}(\mu - R(\lambda_0, A)) = \operatorname{ran}\Big[\Big(\lambda_0 - \frac{1}{\mu}\Big) - A\Big].$$

A 4.4., a 4.6. és a 4.9. Definíciók alapján

$$\mu \in P\sigma(R(\lambda_0, A)) \iff \lambda_0 - \frac{1}{\mu} \in P\sigma(A),$$

továbbá analóg állítások igazak az approximatív pontspektrumra és a reziduális spektrumra is. Így a (b) állítás teljesül, ezzel együtt pedig (a) is. □

Az A és $R(\lambda_0, A)$ spektruma közötti fenti reláció meghatározza $R(\lambda_0, A)$ spektrálsugarát. Így a (4.8) egyenlőség és a (4.6) egyenlőtlenség alapján kapjuk az alábbi állítást.

4.11. Következmény. *Legyen* $\lambda_0 \in \rho(A)$. *Ekkor*

$$\operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(A)) = \frac{1}{r(R(\lambda_0, A))} \geq \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}.$$

Most egy kis kitérőt teszünk *spektrálfelbontás* témakörben, ami a spektrálelmélet egyik legfontosabb területe. Először korlátos operátorokat vizsgálunk.

4.12. Definíció. Legyen $T \in \mathscr{L}(X)$ korlátos operátor, és tegyük fel, hogy a $\sigma(T)$ (kompakt) halmaz előáll mint

$$\sigma(T) = \sigma_c \cup \sigma_u,$$

ahol σ_c és σ_u zárt (tehát kompakt) és diszjunkt halmazok. Legyen

$$P := P_c := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma R(\lambda, T)\, d\lambda \tag{4.9}$$

az ún. *spektrálprojekció*, ahol $\gamma \subset (\mathbb{C} \setminus \sigma_u)$ egy tetszőleges Jordan-görbe, amely pozitív irányban körüljárja σ_c-t. Ez az operátor valóban projekció, és kommutál T-vel, továbbá az

$$X = X_c \oplus X_u$$

spektrálfelbontást definiálja, ahol

$$X_c = \operatorname{ran} P, \quad X_u = \ker P$$

T-invariáns alterek. A T operátor megfelelő alterekre való leszűkítéseire $T_c \in \mathcal{L}(X_c)$ és $T_u \in \mathcal{L}(X_u)$, továbbá

$$\sigma(T_c) = \sigma_c, \quad \sigma(T_u) = \sigma_u.$$

Ezen tulajdonságok egyértelműen meghatározzák az X és T fenti felbontását.

Ha A nemkorlátos operátor, akkor spektrum zárt halmazokra való felbontása nem minden esetben eredményez spektrálfelbontást. Azonban, ha a felbontásban szereplő halmazok egyike kompakt, akkor a rezolvensre vonatkozó spektrálleképezés-tétel felhasználásával a korlátos operátorhoz hasonló eredményre jutunk. Ennek igazolásához szükségünk lesz a következő lemmára.

4.13. Lemma. *Legyenek $Y \subset X$ Banach terek, ahol az*

$$i : Y \to X$$

kanonikus beágyazás folytonos. Ha $(A, D(A))$ zárt operátor X-en,

$$\lambda \in \rho(A), \text{ és } R(\lambda, A)Y \subset Y,$$

akkor

$$\lambda \in \rho(A_|), \text{ és } R(\lambda, A_|) = R(\lambda, A)_|,$$

ahol $A_|$ az A operátor részét jelöli Y-ban, vagyis

$$A_| y = Ay, \quad D(A_|) = \{y \in D(A) \cap Y : Ay \in Y\}.$$

Bizonyítás. A feltételek szerint $R(\lambda, A)_|$ az Y-t $D(A_|)$-be képezi, ezért

$$R(\lambda, A)_| = (\lambda - A_|)^{-1}.$$

Továbbá, ez az inverz korlátos, mivel egy mindenütt definiált zárt operátor. □

4.14. Állítás. *Legyen $A : D(A) \subset X \to X$ zárt operátor, és tegyük fel, hogy a spektruma felbomlik diszjunkt zárt halmazok uniójára, vagyis*

$$\sigma(A) = \sigma_c \cup \sigma_u. \tag{4.10}$$

Ha σ_c kompakt, akkor A-nak létezik

$$X = X_c \oplus X_u$$

spektrálfelbontása a következő értelemben:

(a) Az $A_c := A_{|X_c}$ operátor korlátos X_c-n;

(b)

$$X_1^A = X_c \oplus (X_u)_1^{A_u},$$

ahol $A_u := A_{|X_u}$ (itt X_1^A az A-hoz tartozó, a 2.5. Definíció (iii) pontjában definiált Banach-teret jelöli);

(c) $A = A_c \oplus A_u$;

(d) $\sigma(A_c) = \sigma_c$, $\sigma(A_u) = \sigma_u$.

Bizonyítás. Ha A korlátos, akkor a bizonyítás a (4.9) formulán alapul. Ezért most tegyük fel, hogy A nemkorlátos, és legyen $\lambda \in \rho(A)$ rögzítve.

(a) Az A nemkorlátossága miatt tudjuk, hogy $0 \in \sigma(R(\lambda, A))$. Tehát, a 4.10. Tétel szerint

$$\begin{aligned} \sigma(R(\lambda, A)) &= (\lambda - \sigma_c)^{-1} \bigcup \Big((\lambda - \sigma_u)^{-1} \cup \{0\} \Big) \\ &:= \tau_c \cup \tau_u, \end{aligned} \tag{4.11}$$

ahol $\tau_c, \tau_u \subset \mathbb{C}$ diszjunkt, kompakt halmazok. Legyen most P az $R(\lambda, A)$ (korlátos) operátor (4.11) felbontáshoz tartozó spektrálprojekciója, és legyen

$$X_c := \operatorname{ran} P, \quad X_u := \ker P.$$

Mivel $R(\lambda, A)$ és P felcserélhetők, ezért $R(\lambda, A)X_c \subset X_c$, és a 4.13. Lemma alapján

$$\lambda \in \rho(A_c), \text{ és } R(\lambda, A_c) = R(\lambda, A)_{|X_c}. \tag{4.12}$$

Továbbá, $\sigma(R(\lambda, A_c)) = \tau_c \not\ni 0$. Így az

$$A_c = \lambda - (R(\lambda, A_c))^{-1}$$

operátor korlátos X_c-n, ebből kapjuk (a)-t.

(b) Az előző ponthoz hasonló érvelés alapján

$$\lambda \in \rho(A_u), \text{ és } R(\lambda, A_u) = R(\lambda, A)_{|X_u}. \tag{4.13}$$

Ezt összevetve a (4.12) tulajdonsággal kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} X_c + D(A_u) &= R(\lambda, A_c)X_c + R(\lambda, A_u)X_u \\ &\subset D(A) = R(\lambda, A)(X_c + X_u) \\ &\subset R(\lambda, A_c)X_c + R(\lambda, A_u)X_u \\ &= X_c + D(A_u), \end{aligned}$$

vagyis $X_1^A = X_c + D(A_u)$. Mivel $P \in \mathscr{L}(X)$, ezért

$$P_{|_{X_1^A}} : X_1^A \to X_1^A$$

zárt (ahogy az a definícióból könnyen meggondolható), és a Zártgráf-tétel miatt korlátos. Így a (b) állítás adódik.

(c) Következik (a)-ból és (b)-ből.

(d) Következik a 4.10. Tételből és a (4.11), a (4.12) és a (4.13) tulajdonságokból. □

4.15. Példa (Izolált szingularitások)**.** Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a (4.10) felbontásban $\sigma_c = \{\mu\}$, vagyis a kompakt σ_c halmaz egy pontból áll. Ez azt jelenti, hogy $\mu \in \sigma(A)$ izolált pont, ezért a $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ holomorf függvény Laurent-sorba fejthető

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\lambda - \mu)^n U_n,$$

ha $0 < |\lambda - \mu| < \delta$ valamely elég kicsi δ-ra. Az U_n együtthatók korlátos operátorok, amelyeket a

$$U_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{R(\lambda, A)}{(\lambda - \mu)^{n+1}}\, d\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}$$

képletek definiálnak, ahol γ például a pozitív irányítású, μ középpontú, $\delta/2$ sugarú körvonal. Az U_{-1} operátor éppen a

$$\sigma(A) = \{\mu\} \cup (\sigma(A) \setminus \{\mu\})$$

felbontáshoz tartozó P spektrálprojekciója A-nak. Ezt szokás az $R(\cdot, A)$ *reziduumá*nak is hívni μ-ben. Ha $k > 0$, $U_{-k} \neq 0$, de $U_{-n} = 0$, $n > k$ esetén, akkor μ *k-adrendű pólusa*

$R(\cdot, A)$-nak.
A $\operatorname{ran} P$ spektrális altér dimenziója a μ m_a-val jelölt *algebrai multiplicitása*, míg az

$$m_g := \dim \ker(\mu - A)$$

az ún. *geometriai multiplicitás.* Ha $m_a = 1$, akkor μ *algebrailag egyszerű* vagy *elsőrendű pólus.* Belátható az alábbi összefüggés:

$$m_g + k - 1 \leq m_a \leq m_g \cdot k,$$

ahol a $\infty \cdot 0 := \infty$ koncepcióval élünk. Ebből következik, hogy

(a) $m_a < \infty$ pontosan akkor teljesül, ha μ pólus és $m_g < \infty$;

(b) ha μ k-adrendű pólus, akkor $\mu \in P\sigma(A)$ és $\operatorname{ran} P = \ker(\mu - A)^k$.

Az alábbiakban bizonyítás nélkül kimondunk egy állítást az A és az $R(\lambda, A)$ operátorok izolált spektrumpontjai közötti összefüggésről.

4.16. Állítás. *Legyen A zárt lineáris operátor, és legyen $\lambda_0 \in \rho(A)$. Ekkor $\mu \in \mathbb{C}$ pontosan akkor izolált pontja $\sigma(A)$-nak, ha $(\lambda_0 - \mu)^{-1}$ izolált pontja $\sigma(R(\lambda, A))$-nak. Ebben az esetben az $R(\cdot, A)$ operátor μ pontbeli reziduuma és a μ pólus rendje megegyezik az $R(\cdot, R(\lambda_0, A))$ operátor $(\lambda_0 - \mu)^{-1}$ pontbeli reziduumával és pólusának rendjével.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

Ha A kompakt rezolvensű, akkor a fenti eredményeket összevetve a kompakt operátorokra vonatkozó Riesz–Schauder-féle elmélettel, a következő állítást kapjuk.

4.17. Következmény. *Ha az A operátor kompakt rezolvensű, akkor $\sigma(A)$ minden eleme véges algebrai multiplicitású pólus. Így*

$$\sigma(A) = P\sigma(A).$$

4.2. Félcsoportok és generátoraik spektruma

A 2.21. Definícióban már bevezettük az $A : D(A) \subset X \to X$ (zárt) lineáris operátor *spektrálkorlátjá*nak fogalmát mint

$$s(A) := \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\},$$

az (1.12) definícióban pedig a $T = (T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport *növekedési korlátjá*nak fogalmát mint

$$\omega_0 = \omega_0(T) := \inf\Big\{w \in \mathbb{R} : \exists\, M_w \geq 1,\ \text{melyre } \|T(t)\| \leq M_w \cdot \mathrm{e}^{wt},\ t \geq 0\Big\}.$$

A 2.30 Hille–Yosida-tételből következik, hogy ha $(A, D(A))$ a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport generátora, akkor spektruma egy megfelelő félsíkban fekszik, és

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 < +\infty,$$

ld. a 2.22. Következményt. Az alábbi állításban a félcsoport ezen jellemzőinek további tulajdonságairól lesz szó.

4.18. Állítás. *Legyen a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora $(A, D(A))$. Ekkor*

$$\begin{aligned} -\infty \leq s(A) \leq \omega_0 &= \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| \\ &= \frac{1}{t_0} \ln r(T(t_0)) < \infty \end{aligned} \tag{4.14}$$

minden $t_0 > 0$ esetén. Vagyis,

$$r(T(t)) = \mathrm{e}^{\omega_0 t}, \quad t \geq 0. \tag{4.15}$$

Bizonyítás. Elemi úton igazolható, hogy

$$\inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| =: v.$$

Ebből következik, hogy

$$\mathrm{e}^{vt} \leq \|T(t)\|$$

minden $t \geq 0$ esetén, tehát $v \leq \omega_0$. Legyen most $w > v$. Ekkor van olyan $t_0 > 0$, amelyre

$$\frac{1}{t} \ln \|T(t)\| \leq w$$

minden $t \geq t_0$ esetén, tehát

$$\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq t_0.$$

Mivel $\|T(t)\|$ korlátos $[0, t_0]$-on, ezért található olyan $M \geq 1$ szám, amelyre

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Így $\omega_0 \le w$, tehát $v = \omega_0$.
A spektrálsugár Hadamard-féle definíciójából következik, hogy

$$\begin{aligned} r(T(t)) &= \lim_{n\to\infty} \|T(nt)\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{t\frac{1}{nt}\ln\|T(nt)\|} \\ &= \mathrm{e}^{t\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{nt}\ln\|T(nt)\|)} = \mathrm{e}^{t\omega_0}. \end{aligned}$$

A többi egyenlőtlenséget már bizonyítottuk a 2.22. Következményben. □

Most a fenti állításnak egy nagyon fontos és szép következményét igazoljuk.

4.19. Következmény. *Egy egyenletesen folytonos operátorfélcsoport esetén*

$$s(A) = \omega_0. \tag{4.16}$$

Bizonyítás. Az egyenletesen folytonos félcsoportokra vonatkozó 1.30. Spektrálleképezés-tétel alapján

$$r(T(t)) = \mathrm{e}^{s(A)t},$$

így az $s(A) = \omega_0$ egyenlőség a 4.18. Állításból következik. □

4.20. Következmény. *Legyen* $(A, D(A))$ *egy* $(T(t))_{t\ge 0}$ *erősen folytonos félcsoport generátora, amelyre* $\omega_0 = -\infty$ *(ez fennáll pl. ha a félcsoport nilpotens). Ekkor*

$$r(T(t)) = 0,\ t > 0 \ \textit{és}\ \sigma(A) = \emptyset.$$

4.21. Példa (Félcsoportok spektrumára)**.** Ebben a példában (bal)eltolás-félcsoportokat vizsgálunk különböző függvénytereken (ld. az 1.4.3. és a 2.2.2. alpontokat), és látni fogjuk, hogy a spektrum nagymértékben múlik a Banach-tér megválasztásán, amelyen a félcsoport hat. Először vegyük észre, hogy a

$$\varepsilon_\lambda(s) := \mathrm{e}^{\lambda s}, \quad s \in \mathbb{R}$$

exponenciális függvényekre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varepsilon_\lambda = \lambda\varepsilon_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

teljesül. Mivel az eltolás-félcsoport A generátora a megfelelő értelmezési tartományon definiált első derivált (ld. a 2.25. Állítást), ezért λ pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha $\varepsilon_\lambda \in D(A)$.

1. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ a baleltolás-félcsoport az $X := C_0(\mathbb{R}_+)$ Banach-téren. Ekkor a generátora

$$\begin{aligned} Af &= f' \\ D(A) &= \{f \in C_0(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\mathbb{R}_+) : f' \in C_0(\mathbb{R}_+)\}. \end{aligned}$$

Ezért $\varepsilon_\lambda \in D(A)$ pontosan akkor teljesül, ha $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Így

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}.$$

Mivel $(T(t))_{t\geq 0}$ kontrakció-félcsoport, ezért $s(A) \leq \omega_0 \leq 0$. Ebből, valamint abból, hogy a spektrum zárt, következik, hogy

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}.$$

Az ε_λ függvények egyben a $T(t)$ operátorok sajátfüggvényei is $\mathrm{e}^{\lambda t}$ sajátértékkel, így kapjuk, hogy

$$P\sigma(T(t)) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

és

$$\sigma(T(t)) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}, \text{ ha } t > 0.$$

2. Legyen most $(T(t))_{t\geq 0}$ a bal eltolás félcsoport az $X := C_0(\mathbb{R})$ Banach-téren. Ekkor $P\sigma(A) = \emptyset$, mivel egyetlen ε_λ függvény sincs benne $D(A)$-ban. Másrészt, minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f_n(s) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha s} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

függvényekből álló sorozat approximatív sajátvektora A-nak $\mathrm{i}\alpha$ approximatív sajátértékkel. Ebből következik, hogy

$$A\sigma(A) = \sigma(A) = \mathrm{i}\mathbb{R},$$

és hasonlóan

$$\sigma(T(t)) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

3. Legyen most $(T(t))_{t\geq 0}$ a nilpotens baleltolás-félcsoport az $X := C_0(0,1]$ Banach-téren. Ekkor a 4.20. Következményből adódik, hogy

$$\sigma(T(t)) = \{0\}, \quad \sigma(A) = \emptyset.$$

Továbbá, minden $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

$$(R(\lambda, A)f)(s) = \int_0^s \mathrm{e}^{-\lambda(s-\tau)} f(\tau)\, d\tau, \quad s \in (0,1],\ f \in X.$$

4. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ a periodikus eltoláscsoport pl. az $X := C_{2\pi}(\mathbb{R})$ Banach-téren (ld. az 1.4.3. alpontot). Ekkor $\varepsilon_\lambda \in D(A)$ pontosan akkor teljesül, ha $\lambda \in \mathrm{i}\mathbb{Z}$. Mivel A kompakt rezolvensű (ld. a 2.80. Példát), ezért a 4.17. Következmény alapján

$$\sigma(A) = P\sigma(A) = \mathrm{i}\mathbb{Z}.$$

A $T(t)$ operátorok spektruma minden t-re része a

$$\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

egységkörvonalnak, és tartalmazza az e^{kit}, $k \in \mathbb{Z}$ sajátértékeket. Mivel $\sigma(T(t))$ zárt, ezért a 4.42. Tételből következik, hogy

$$\sigma(T(t)) = \begin{cases} \Gamma, & \frac{t}{2\pi} \neq \mathbb{Q}, \\ \Gamma_q, & \frac{t}{2\pi} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ ahol } p, q \text{ prímek, } (p,q) = 1. \end{cases}$$

Itt $\Gamma_q = \{z \in \mathbb{C} : z^q = 1\}$.

4.22. Példа ($s(A) < \omega_0$)**.** Tekintsük az

$$X := C_0(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+, \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s)$$

Banach teret, amely azon $\mathbb{R}_+$-on folytonos, végtelenben eltűnő függvényekből áll, amelyek integrálhatóak e^s-el megszorozva. A norma legyen

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f\|_1 = \sup_{s\geq 0} |f(s)| + \int_0^\infty |f(s)|\mathrm{e}^s\,\mathrm{d}s.$$

A baleltolások egy erősen folytonos operátorfélcsoportot definiálnak X-nek, amelynek generátora

$$\begin{aligned} Af &= f', \\ D(A) &= \{f \in X : f \in C^1(\mathbb{R}_+), f' \in X\}. \end{aligned}$$

Mivel $\|T(t)\| = 1$ minden $t \geq 0$ esetén, ezért $\omega_0 = 0$. Másrészt, $\varepsilon_\lambda \in D(A)$ akkor teljesül, ha $\operatorname{Re}\lambda < -1$, így

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < -1\},$$

tehát $s(A) \geq -1$. Megmutatjuk, hogy ha $\operatorname{Re}\lambda > -1$, akkor $\lambda \in \rho(A)$. Legyen $f \in X$. A 2.17. Tétel (a) pontja alapján be kell látnunk, hogy

$$\|\cdot\|_1 - \lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) f \,\mathrm{d}s \quad \text{és} \quad \|\cdot\|_\infty - \lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) f \,\mathrm{d}s$$

határértékek léteznek. Mivel

$$\|T(s)f\|_1 = \int_0^\infty \mathrm{e}^u |f(s+u)|\, du = \mathrm{e}^{-s} \int_s^\infty \mathrm{e}^u |f(u)|\, du \leq \mathrm{e}^{-s}\|f\|_1,$$

ezért

$$\left\| \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) f \,\mathrm{d}s \right\|_1 \leq \int_0^t |\mathrm{e}^{-\lambda s}| \|T(s)f\|_1 \,\mathrm{d}s \leq \int_0^t \mathrm{e}^{-s(\operatorname{Re}\lambda + 1)} \|f\|_1 \,\mathrm{d}s,$$

ami konvergens, hiszen $\operatorname{Re}\lambda + 1 > 0$. Legyen most $u \in [0, \infty)$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}\left| \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s} (T(s)f)(u) \,\mathrm{d}s \right| &\leq \mathrm{e}^{-u} \int_0^t \mathrm{e}^{-s(\operatorname{Re}\lambda+1)} \mathrm{e}^{s+u} |f(s+u)| \,\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^t 1 \cdot \mathrm{e}^s |f(s)| \,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

ami szintén konvergens, hiszen $f \in X$. Így

$$g := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s} T(s) f \,\mathrm{d}s$$

létezik X-ben minden $f \in X$ esetén, és $(\lambda - A)g = f$. Tehát

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1\}, \text{ tehát } s(A) = -1.$$

4.23. Példa (Delay (késleltetett) félcsoport)**.** Idézzük fel a 2.48. Példában bevezetett delay (vagyis késleltetett) differenciáloperátort! Legyen $X := C[-1, 0]$,

$$\begin{aligned} Af &:= f', \\ D(A) &:= \left\{ f \in C^1[-1,0] : f'(0) = Lf \right\}, \end{aligned}$$

ahol L egy folytonos lineáris funkcionál $C[-1, 0]$-n. Láttuk, hogy ez az operátor generátor. Számítsuk ki A pontspektrumát, $P\sigma(A)$-t! Ahogy az előbbi eltolás-félcsoportok esetén, $f \in C[-1, 0]$ pontosan akkor sajátfüggvénye A-nak, ha $f = c\,\varepsilon_\lambda$ $(c \neq 0)$, ahol

$$\varepsilon_\lambda(s) = \mathrm{e}^{\lambda s}, \quad s \in [-1, 0]$$

valamely $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén. Másrészt, $\varepsilon_\lambda \in D(A)$ pontosan akkor teljesül, ha ε_λ kielégíti a

$$\varepsilon_\lambda'(0) = L\varepsilon_\lambda$$

peremfeltételt, vagyis

$$\lambda = L\varepsilon_\lambda.$$

Definiáljuk a

$$\xi(\lambda) := \lambda - L\varepsilon_\lambda$$

függvényt! Ekkor az A operátor pontspektrumára

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \xi(\lambda) = 0\}.$$

Mivel $\xi(\cdot)$ analitikus függvény $\mathbb{C}$-n, ezért a gyökei izolált pontok, tehát $P\sigma(A)$ diszkrét részhalmaza $\mathbb{C}$-nek.
Ha a teljes $\sigma(A)$ spektrumot akarjuk meghatározni, akkor vegyük észre, hogy

$$X_1^A = (D(A), \|\cdot\|_A)$$

zárt altere $C^1[-1,0]$-nak, továbbá az

$$i : C^1[-1,0] \to C[-1,0]$$

kanonikus beágyazás az Arzelà–Ascoli-tétel alapján kompakt. Így a 2.79. Állításból következik, hogy A kompakt rezolvensű, és a 4.17. Következmény szerint

$$\sigma(A) = P\sigma(A).$$

4.24. Definíció. Ahogy láttuk, a delay differenciáloperátor spektruma izolált sajátértékekből áll. Pontosabban, a

$$\lambda \mapsto \xi(\lambda) = \lambda - L\varepsilon_\lambda$$

ún. *karakterisztikus függvénnyel* a spektrum

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \xi(\lambda) = 0\}$$

alakú, azaz a $\xi(\lambda) = 0$ *karakterisztikus egyenlet gyökei*t tartalmazza.

A következőkben kis kitérőt teszünk *periodikus félcsoportok* spektrálelméletébe. Ez a terület önmagában is érdekes, hiszen ezen félcsoportokat spektrális tulajdonságaik alapján lehet karakterizálni. Másrészt, a soron következő alfejezet egyik legfontosabb tételének, a pont- és reziduális spektrumra vonatkozó spektrálleképezés-tételnek a bizonyítása is az ilyen tulajdonságú félcsoportok spektrumán alapkszik.
Kezdjük először a periodikus félcsoport definíciójával.

4.25. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport *periodikus*, ha létezik olyan $t_0 > 0$, hogy $T(t_0) = \mathrm{Id}$. Ekkor $(T(t))_{t\geq 0}$ *periódusa*

$$\tau := \inf\{t_0 > 0 : T(t_0) = \mathrm{Id}\}.$$

Az alábbi állításban összefoglaljuk a periodikus félcsoportok néhány fontos tulajdonságát, amelyek könnyen adódnak a definícióból.

4.26. Állítás. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ periodikus félcsoport, τ a $(T(t))_{t\geq 0}$ periódusa. Ekkor*

(a) $(T(t))_{t\geq 0}$ csoport is, és

$$T(t)^{-1} = T(n\tau - t), \quad 0 \leq t \leq n\tau;$$

(b) $(T(t))_{t\geq 0}$ korlátos, tehát $\omega_0 = 0$ és $\sigma(A) \subset \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Bizonyítás. (a) Következik abból, hogy $T(n\tau) = \mathrm{Id}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

(b) T korlátos, hiszen $\sup_{t\in[0,\tau]} \|T(t)\| < \infty$. A többi állítás következik a 2.35. Tételből. □

Ha $(T(t))_{t\geq 0}$ periodikus mátrix-csoport $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$-ben, akkor a Jordan-normálalak felhasználásával kapjuk, hogy az A generátor hasonló egy $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, a $T(t)$ operátorok pedig egy-egy $\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n t})$ alakú mátrixhoz, ahol $\lambda_i \in \frac{2\pi\mathrm{i}}{\tau} \cdot \mathbb{Z}$. Végtelen dimenzióban hasonló karakterizációt fogunk bizonyítani.

4.27. Lemma. *Legyen $(A, D(A)$ egy $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora az X Banach-téren. Tegyük fel, hogy*

1. *$P\sigma(A) \subset 2\pi\mathrm{i}\alpha\mathbb{Z}$ valamely $\alpha > 0$ esetén;*

2. *a megfelelő sajátvektorok sűrű alteret feszítenek ki X-ben.*

Ekkor $(T(t))_{t\geq 0}$ *periodikus.*

Bizonyítás. Legyen $0 \neq x \in D(A)$, amelyre $Ax = (2\pi\mathrm{i}\alpha n)x$ valamely $n \in \mathbb{N}$ természetes számra. Legyen

$$\xi(s) := \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha n(t-s)}T(s)x, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Ekkor

$$\xi(0) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha nt}x, \quad \xi(t) = T(t)x,$$

és a feltételből következik, hogy $\xi'(s) = 0$ minden $0 \leq s \leq t$ esetén. Mivel t tetszőleges volt, ezért

$$T(t)x = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha nt}x, \quad t \geq 0,$$

ha x az A sajátvektora. Mivel ezek a feltétel szerint sűrű alteret alkotnak, ezért $(T(t))_{t\geq 0}$ periodikus $\tau < \frac{1}{\alpha}$ periódussal. □

Az alábbiakban kiderül, hogy a lemma feltételei valójában szükségesek is a félcsoport periodikusságához. Ehhez először egy újabb lemmát bizonyítunk.

4.28. Lemma. *Legyen* $(T(t))_{t\geq 0}$ *egy periodikus erősen folytonos félcsoport* $\tau > 0$ *periódussal és* A *generátorral. Ekkor*

$$\sigma(A) \subset \frac{2\pi\mathrm{i}}{\tau}\mathbb{Z},$$

és ha $\mu \notin \frac{2\pi\mathrm{i}}{\tau}\mathbb{Z}$, *akkor*

$$R(\mu, A) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\mu\tau}} \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\mu s}T(s)\,\mathrm{d}s \tag{4.17}$$

az erős topológiában.

Bizonyítás. A (2.11) és a (2.12) egyenlőségekből következik $t = \tau$ választással, hogy ha $\mu \neq \frac{2\pi i n}{\tau}$ valamely $n \in \mathbb{Z}$ esetén, akkor $\mu - A$-nak van kétoldali inverze, és ez (4.17) alakú. □

4.29. Tétel. *Legyen* $(A, D(A))$ *egy* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport generátora az* X *Banach-téren. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $(T(t))_{t\geq 0}$ *periodikus;*

(ii) $\sigma(A) = P\sigma(A) \subset 2\pi\mathrm{i}\alpha\mathbb{Z}$ *valamely* $\alpha > 0$ *esetén, és a megfelelő sajátvektorok sűrű alteret feszítenek ki* X*-ben.*

Bizonyítás. $(ii) \Rightarrow (i)$: A 4.27. Lemmából adódik.
$(i) \Rightarrow (ii)$: A 4.28. Lemmában láttuk, hogy ha $(T(t))_{t\geq 0}$ periódusa τ, akkor A rezolvensére a (4.17) előállítás érvényes. Ebből következik, hogy $R(\mu, A)$ meromorf függvény, amelynek pólusai $\mu_n = \frac{2\pi \mathrm{i} n}{\tau}$, $n \in \mathbb{Z}$ alakúak. Továbbá, némi számolással adódik, hogy

$$P_n := \lim_{\mu \to \mu_n} (\mu - \mu_n) R(\mu, A) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathrm{e}^{-\mu_n s} T(s)\, \mathrm{d}s \in \mathscr{L}(X). \tag{4.18}$$

A 4.15. Példában meggondoltak alapján P_n éppen a μ_n-hez tartozó spektrálprojekció, és $\operatorname{ran} P_n = \ker(\mu_n - A)$. Ebből és a 4.28. Lemmából már adódik, hogy

$$\sigma(A) = P\sigma(A) \subset \frac{2\pi \mathrm{i}}{\tau} \cdot \mathbb{Z}.$$

Azt kell még megmutatnunk, hogy a megfelelő sajátvektorok sűrű alteret feszítenek ki X-ben, vagyis

$$\overline{\operatorname{lin}} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} P_n X = X.$$

Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan $0 \neq \varphi \in X^*$, amelyre $P_n X \subset \ker \varphi$, $n \in \mathbb{Z}$. Másrészt, P_n (4.18) definíciójából látszik, hogy P_n valójában az $s \mapsto T(s)$ τ szerint periodikus függvény n-edik Fourier-együtthatója. Így $\varphi(P_n x)$ a $s \mapsto \varphi(T(s)x)$ függvény n-edik Fourier-együtthatója minden $x \in X$ vektorra. Tehát, ha $\varphi(P_n x) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$ teljesül minden $x \in X$ esetén, akkor az $s \mapsto \varphi(T(s)x)$ függvény azonosan 0 kellene legyen. Másrészt, ha $x \in X$ olyan, amelyre $\varphi(x) \neq 0$, akkor ez nem állhat fenn, így ellentmondásra jutottunk. □

4.3. Spektrálleképezés-tételek

Ha $(A, D(A))$ a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport generátora, akkor a $T(t)$ operátorok – az egyenletesen folytonos félcsoportok analógiájára – valamiképpen az „e^{tA}" exponenciális általánosításai. Ezt az összefüggést most a spektrumok esetén vizsgáljuk meg, vagyis azt a kérdést járjuk körbe, hogy mikor lesz

$$\sigma(T(t)) = \mathrm{e}^{t\sigma(A)} = \{\mathrm{e}^{t\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

4.30. Példa. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ olyan félcsoport, amely nem terjeszthető ki csoporttá. Például, tekintsük a baleltolás-félcsoportot $C_0(\mathbb{R}_+)$-on. Ekkor $0 \in \sigma(T(t))$ teljesül minden $t > 0$ esetén, viszont $0 \notin \mathrm{e}^{t\sigma(A)}$.

Ezért az „elvárható” összefüggés a félcsoport és a generátor spektruma között az ún. *spektrálleképezés-tétel*:

$$\text{(SLT)} \qquad \sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \mathrm{e}^{t\sigma(A)}, \quad t \geq 0.$$

4.31. Példa. Ha egy félcsoportra

$$s(A) < \omega_0$$

teljesül, akkor

$$\mathrm{e}^{t\sigma(A)} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \mathrm{e}^{ts(A)}\}$$

és

$$r(T(t)) = \mathrm{e}^{t\omega_0} > \mathrm{e}^{ts(A)}$$

miatt a félcsoport nem teljesítheti (SLT)-t.

4.32. Példa. Legyen $1 < p < q < \infty$, és definiálja az

$$X := L^p[1,\infty) \cap L^q[1,\infty)$$

téren a normát

$$\|f\| := \|f\|_p + \|f\|_q.$$

Ekkor $(X, \|\cdot\|)$ Banach-tér. Legyen

$$(T(t)f)(s) := f(s\mathrm{e}^t),$$

$s \geq 1$, $t \geq 0$, $f \in X$. Ekkor $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport, generátora pedig

$$(Af)(s) = sf'(s), \quad s \geq 1,$$

ahol

$$D(A) = \{f \in X : f \text{ abszolút folytonos és } s \mapsto sf'(s) \in X\}.$$

Ekkor belátható, hogy

$$s(A) = -\frac{1}{p} < -\frac{1}{q} = \omega_0.$$

Lássuk most, hogy milyen reláció az, amit minden erősen folytonos félcsoport kielégít.

4.33. Tétel (Spektráltartalmazás)**.** *Legyen* $(A, D(A))$ *a* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport generátora. Ekkor az alábbi tartalmazások állnak fenn.*

$$\sigma(T(t)) \supset \mathrm{e}^{t\sigma(A)}, \quad t \geq 0, \tag{4.19}$$

továbbá minden $t \geq 0$ *esetén*

$$P\sigma(T(t)) \supset \mathrm{e}^{tP\sigma(A)}, \tag{4.20}$$

$$A\sigma(T(t)) \supset \mathrm{e}^{tA\sigma(A)}, \tag{4.21}$$

$$R\sigma(T(t)) \supset \mathrm{e}^{tR\sigma(A)}. \tag{4.22}$$

Bizonyítás. Idézzük fel a (2.11) és a (2.12) egyenlőségeket!

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\lambda t}x - T(t)x &= (\lambda - A)\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-s)}T(s)x \,\mathrm{d}s, \quad \text{ha } x \in X, \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-s)}T(s)(\lambda - A)x \,\mathrm{d}s, \quad \text{ha } x \in D(A). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Ebből következik, hogy ha $\lambda - A$ nem bijektív, akkor $\mathrm{e}^{\lambda t} - T(t)$ sem bijektív. Így beláttuk a (4.19) tartalmazást.

Most belátjuk a (4.21) tartalmazást, ezzel egyben a (4.20) tartalmazást is. Legyen $\lambda \in A\sigma(A)$, és egy hozzá tartozó approximatív sajátvektor az $(x_n) \subset D(A)$ sorozat. Definiáljunk egy új sorozatot mint

$$y_n := \mathrm{e}^{\lambda t}x_n - T(t)x_n = \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda(t-s)}T(s)(\lambda - A)x_n \,\mathrm{d}s.$$

Ekkor létezik olyan $c > 0$ konstans, amelyre

$$\|y_n\| \leq \int_0^t \|\mathrm{e}^{\lambda(t-s)}T(s)(\lambda - A)x_n\| \,\mathrm{d}s \leq c\|(\lambda - A)x_n\| \to 0, \; n \to \infty.$$

Tehát $\mathrm{e}^{\lambda t}$ approximatív sajátértéke $T(t)$-nek (minden $t \geq 0$ esetén), és (x_n) egy hozzá tartozó approximatív sajátvektor.

Legyen most egy $\lambda \in R\sigma(A)$. Ekkor a (4.23) alapján

$$\operatorname{ran}(\mathrm{e}^{\lambda t} - T(t)) \subset \operatorname{ran}(\lambda - A),$$

tehát $\operatorname{ran}(\mathrm{e}^{\lambda t} - T(t))$ nem sűrű X-ben. Tehát (4.22) fennáll. $\square$

A fenti ellenpéldákból következik, hogy a spektráltartalmazás fordított iránya nem mindig áll fenn. A következő tételből kiderül, hogy ezért az approximatív pontspektrum a felelős.

4.34. Tétel (Spektrálleképezés a pont- és reziduális spektrumra)**.** *Legyen* $(A, D(A))$ *a* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport generátora. Ekkor az alábbi egyenlőségek állnak fenn minden* $t \geq 0$ *esetén*

$$P\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \mathrm{e}^{tP\sigma(A)}, \tag{4.24}$$

$$R\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \mathrm{e}^{tR\sigma(A)}. \tag{4.25}$$

Bizonyítás. Legyen $t_0 > 0$ és $0 \neq \lambda \in P\sigma(T(t_0))$. Átskálázás után (ld. az 1.5.2. és a 2.2.1. alpontokat) áttérhetünk az

$$(S(t))_{t\geq 0} = \left(\mathrm{e}^{-t\ln\lambda} T(t_0 t)\right)_{t\geq 0}$$

félcsoportra, amelynek generátora

$$B = t_0 A - \ln\lambda.$$

Mivel $S(1)$-nek az 1 sajátértéke, ezért tegyük fel az elejétől, hogy $t_0 = 1$ és $\lambda = 1$. Tekintsük most az

$$Y := \{y \in X : T(1)y = y\}$$

sajátalteret. Ez zárt altér, $(T(t))_{t\geq 0}$-invariáns és a feltétel szerint nemtriviális. Másrészt, az Y-ra megszorított $\left(T(t)_|\right)_{t\geq 0}$ félcsoport periodikus $\tau \in \mathbb{N}^{-1}$ periódussal. A periodikus félcsoportok karakterizációjáról szóló 4.29. Tétel alapján létezik olyan $n \in \mathbb{Z}$ szám, hogy

$$\mu := 2\pi i n \in P\sigma(A_|).$$

Mivel $P\sigma(A_|) \subset P\sigma(A)$, ezért kapjuk, hogy

$$1 \in \mathrm{e}^{P\sigma(A)}.$$

Ebből és a (4.20) tartalmazásból következik (4.24).
A reziduális spektrumra vonatkozó (4.25) egyenlőség hasonlóan adódik az ún. duális félcsoportra vonatkozó meggondolásból, itt nem részletezzük. $\square$

Mivel a pont- és reziduális spektrumra teljesül a spektrálleképezés-tétel, ezért ha a teljes spektrumra szeretnénk spektrálleképezés-tételt bizonyítani, akkor ezt például olyan félcsoportokra tehetjük meg, amelyekre

$$\sigma(T(t)) = P\sigma(T(t)) \cup R\sigma(T(t))$$

teljesül. Ilyenek például a kompakt félcsoportok.
Kereshetünk azonban olyan további félcsoport-tulajdonságo(ka)t, amely(ek) biztosítják, hogy

$$A\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \mathrm{e}^{tA\sigma(A)} \tag{4.26}$$

fennálljon. Az alábbiakban ki fog derülni, hogy a normafolytonosság a legáltalánosabb alkalmas tulajdonság. Mielőtt azonban ezt bizonyítanánk, karakterizáljuk azokat az approximatív sajátértékeket, amelyek nem okoznak problémát a spektrálleképezés-tételben.

4.35. Lemma. *Legyen $\mu \neq 0$ a $T(t_0)$ operátor egy approximatív sajátértéke. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) Létezik egy olyan $(x_n) \subset X$ sorozat, amelyre $\|x_n\| = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|T(t_0)x_n - \mu x_n\| = 0, \quad \lim_{t\downarrow 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T(t)x_n - x_n\| = 0.$$

(ii) Létezik $\lambda \in A\sigma(A)$ szám, amelyre $\mu = \mathrm{e}^{\lambda t_0}$.

Bizonyítás. $(ii) \Rightarrow (i)$: A (4.23) egyenlőségből belátható, hogy a $\lambda \in A\sigma(A)$ számhoz tartozó tetszőleges $(x_n) \subset D(A)$ approximatív sajátvektor teljesíti az (i) feltételt. Ugyanis, $\|x_n\| = 1$ teljesül, továbbá,

$$\|T(t_0)x_n - \mu x_n\| \leq \int_0^{t_0} \|\mathrm{e}^{\lambda(t_0-s)}T(s)(\lambda - A)x_n\|\,\mathrm{d}s \leq c\|(\lambda - A)x_n\| \to 0,\ n \to \infty.$$

A második limeszhez írjuk fel a (4.23) egyenlőséget $\lambda = 0$-ra, és használjuk ki, hogy a feltétel szerint

$$\|Ax_n\| \to |\lambda| = 0,$$

tehát az Ax_n, $n \in \mathbb{N}$ vektorok korlátosak! Így létezik olyan $L > 0$ konstans

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T(t)x_n - x_n\| \leq \int_0^t \|T(s)Ax_n\|\,\mathrm{d}s \leq t \cdot L, \quad t \in [0, 1].$$

Ebből

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T(t)x_n - x_n\| = 0$$

következik.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Átskálázással feltehető, hogy $t_0 = 1$ és $\mu = 1$. Legyen $(x_n) \subset X$ az (i) pont alapján létező approximatív sajátvektor. A $(T(t))_{t\geq 0}$ operátorok (x_n)-en való egyenletes folytonosságából következik, hogy a

$$[0,1] \ni t \mapsto T(t)x_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

leképezések ekvifolytonosak. Legyenek $\varphi_n \in X^*$, $\|\varphi_n\| \leq 1$ olyan duális térbeli elemek, amelyekre

$$\varphi_n(x_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Ekkor a

$$[0,1] \ni s \mapsto \xi_n(s) := \varphi_n(T(s)x_n)$$

függvények egyenletesen korlátosak és ekvifolytonosak. Tehát, az Arzelà–Ascoli-tétel alapján a $(\xi_n) \subset C[0,1]$ függvénysorozatnak létezik (egyenletesen) konvergens részsorozata – jelölje ezt is (ξ_n). Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n =: \xi \in C[0,1].$$

Mivel

$$\xi(0) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(0) \geq \frac{1}{2},$$

ezért $\xi \neq 0$. Így a ξ függvény Fourier-együtthatói közül valamelyik nem 0, vagyis létezik olyan $\lambda_m := 2\pi i m$, $m \in \mathbb{Z}$ szám, amelyre

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda_m s}\xi(s)\,\mathrm{d}s \neq 0.$$

Legyen

$$z_n := \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda_m s}T(s)x_n\,\mathrm{d}s.$$

Ekkor a 2.4. Lemma (c) pontja alapján $z_n \in D(A)$. Továbbá,

$$(\lambda_m - A)z_n = x_n - \mathrm{e}^{-\lambda_m}T(1)x_n = x_n - T(1)x_n \to 0$$

az (i) feltétel szerint. Másrészt,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|z_n\| &\geq \lim_{n\to\infty} \varphi_n(z_n) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \left|\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda_m s}\varphi_n(T(s)x_n)\,\mathrm{d}s\right| \\ &\geq \left|\int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda_m s}\xi(s)\,\mathrm{d}s\right| > 0.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy az A generátornak a $\lambda_m = 2\pi i m$ szám approximatív sajátértéke, egy hozzá tartozó approximatív sajátvektor pedig a

$$\left(\frac{z_n}{\|z_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sorozat. □

4.36. Tétel (Spektrálleképezés normafolytonos félcsoportokra)**.** *Legyen* $(A, D(A))$ *a* $(T(t))_{t\geq 0}$ *normafolytonos félcsoport generátora. Ekkor*

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \mathrm{e}^{t\sigma(A)}, \quad t \geq 0.$$

Bizonyítás. A 4.33. és a 4.34. Tételek miatt, valamint átskálázás után elegendő az alábbit megmutatni:
Ha $1 \in A\sigma(T(1))$, akkor létezik olyan $m \in \mathbb{Z}$ egész, hogy $\lambda_m := 2\pi i m \in A\sigma(A)$.
Ennek bizonyításához vegyünk a $T(1)$ operátornak egy 1-hez tartozó approximatív sajátvektorát, vagyis legyen

$$\|x_n\| = 1,\ n \in \mathbb{N}, \quad \|T(1)x_n - x_n\| \to 0.$$

Továbbá, tegyük fel, hogy $t \mapsto T(t)$ normafolytonos $t \geq t_0$ esetén. Legyen $k \in \mathbb{N}$ olyan, amelyre $t_0 < k$. Ekkor

$$\begin{aligned}&\|T(k)x_n - x_n\| \\ &= \|T(k)x_n - T(k-1)x_n + T(k-1)x_n - T(k-2)x_n + \cdots + T(1)x_n - x_n\| \\ &\leq (\|T(k-1)\| + \|T(k-2)\| + \cdots \|T(0)\|) \cdot \|T(1)x_n - x_n\| \to 0,\end{aligned}$$

$n \to \infty$. A feltevésünk szerint a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport egyenletesen folytonos a $(T(k)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorokon, továbbá a $(T(k)x_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorokon is, mivel ez utóbbiak nullsorozatot alkotnak. Így a félcsoport egyenletesen folytonos az

$$x_n = T(k)x_n - (T(k)x_n - x_n)$$

vektorokon is, ezért az állítás adódik a 4.35. Lemmából. □

4.37. Következmény. *Legyen $(A, D(A))$ a $(T(t))_{t\geq 0}$ normafolytonos félcsoport generátora. Ekkor*

$$\text{(SKeNK)} \qquad s(A) = \omega_0.$$

A (2.40) diagram alapján számos félcsoportregularitási tulajdonságból következik a normafolytonosság, tehát ilyen esetekben is teljesül a spektrálleképezés-tétel.

4.38. Következmény. *A*

$$\text{(SLT)} \qquad \sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \mathrm{e}^{t\sigma(A)}, \quad t \geq 0.$$

spektrálleképezés-tétel, és a

$$\text{(SKeNK)} \qquad s(A) = \omega_0.$$

egyenlőség teljesül az alábbi esetekben:

(a) kompakt félcsoportok,

(b) differenciálható félcsoportok,

(c) analitikus félcsoportok,

(d) egyenletesen folytonos félcsoportok.

A félcsoportok aszimptotikus tulajdonságainak vizsgálatakor valójában az (SKeNK) tulajdonság lényeges. Ez pedig következik az (SLT)-nél gyengébb ún. *gyenge spektrálleképezés-tétel*ből is:

$$\text{(GySLT)} \qquad \sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \overline{\mathrm{e}^{t\sigma(A)}} \setminus \{0\}, \quad t \geq 0.$$

Belátjuk, hogy a szorzásfélcsoportra fennáll a spektrálleképezés-tétel ezen gyengébb verziója.

4.39. Állítás. *Legyen az M_q operátor egy $(T_q(t))_{t\geq 0}$ szorzásfélcsoport generátora az $X = C_0(\Omega)$ vagy $X = L^p(\Omega)$ téren egy megfelelő $q : \Omega \to \mathbb{C}$ függvénnyel. Ekkor*

$$\text{(GySLT)} \qquad \sigma(T_q(t)) = \overline{\mathrm{e}^{t\sigma(M_q)}}, \quad t \geq 0.$$

Bizonyítás. Az 1.33. ill. az 1.38. Állítások (d) pontjában láttuk, hogy egy szorzásoperátor spektruma a q függvény (lényeges) képhalmazának lezártja, tehát

$$\sigma(T_q(t)) = \overline{\mathrm{e}^{tq_{(\mathrm{ess})}(\Omega)}} = \overline{\mathrm{e}^{t\overline{q_{(\mathrm{ess})}(\Omega)}}} = \overline{\mathrm{e}^{t\sigma(M_q)}}$$

minden $t \geq 0$ esetén. □

4.40. Példa. Egyszerű és tipikus példa szorzásoperátorra

$$M_q((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) := (\mathrm{i}nx_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

ahol $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$. Ekkor

$$\sigma(M_q) = \mathrm{i}\mathbb{Z},$$

másrészt

$$\sigma(T_q(t)) = \Gamma, \quad \text{ha } \frac{t}{2\pi} \notin \mathbb{Q},$$

ahol $\Gamma \subset \mathbb{C}$ az egységkörvonal. Tehát (GySLT) fennáll, de (SLT) nem teljesül.

A Halmos-féle spektráltétel szerint egy Hilbert-téren értelmezett normális operátor mindig izomorf egy szorzásoperátorral egy alkalmas L^2-téren. Így az ilyen operátorokra is teljesül (GySLT).

4.41. Következmény. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ egy Hilbert-téren értelmezett normális operátorokból álló erősen folytonos félcsoport, generátora $(A, D(A))$. Ekkor*

$$\text{(GySLT)} \qquad \sigma(T(t)) = \overline{\mathrm{e}^{t\sigma(A)}}, \quad t \geq 0.$$

Ugyan azok az erősen folytonos *csoportok*, amelyek nem korlátos generátorral rendelkeznek, egyetlen, a 4.38. Tételben felsorolt regularitási tulajdonsággal sem rendelkeznek, *korlátos* csoportokra mégis igaz a spektrálleképezés-tétel gyenge verziója.

4.42. Tétel. *Legyen $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ korlátos erősen folytonos csoport az X Banach-téren, generátora $(A, D(A))$. Ekkor a gyenge spektrálleképezés-tétel teljesül, tehát*

$$\text{(GySLT)} \qquad \sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \overline{\mathrm{e}^{t\sigma(A)}} \setminus \{0\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

A fejezet végén röviden azt tárgyaljuk, hogy mit tudunk mondani a perturbált félcsoport spektrumáról.

4.43. Állítás. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport, generátora $(A, D(A)$. Legyen $B \in \mathscr{L}(X)$ tetszőleges. Ekkor ha $\lambda \in \rho(A)$, akkor*

$$\lambda \in \sigma(A+B) \iff \lambda \in \sigma(BR(\lambda, A)) \iff \lambda \in \sigma(R(\lambda, A)B).$$

Bizonyítás. Az állítás következik az alábbi egyenlőségből:

$$\lambda - A - B = (\mathrm{Id} - BR(\lambda, A))\,(\lambda - A)$$

és abból, hogy

$$\sigma(BR(\lambda, A)) \setminus \{0\} = \sigma(R(\lambda, A)B) \setminus \{0\}.$$

□

Ez alapján ha $(S(t))_{t\geq 0}$ jelöli az $A+B$ által generált félcsoportot, akkor

$$\text{(SLT)} \qquad \sigma(S(t)) \setminus \{0\} = \mathrm{e}^{t\sigma(A+B)}, \quad t \geq 0.$$

spektrálleképezés-tétel például a 3.9. vagy a 3.10. Állítások feltételei mellett.

4.4. Feladatok

4.1. Feladat. Határozzuk meg az alábbi operátorok spektrumát az $X = C[0,1]$ Banach-téren!

(a) $Af(s) := \frac{1}{s(1-s)} \cdot f(s)$, $D(A) = \{f \in X : Af \in X\}$;

(b) $Bf(s) := \mathrm{i}s^2 \cdot f(s)$, $D(B) = X$;

(c) $Cf := f'$, $D(C) = \{f \in C^1[0,1] : f(0) = 0\}$;

(d) $Df := f'$, $D(D) = \{f \in C^1[0,1] : f'(1) = 0\}$;

(e) $Ef := f'$, $D(E) = \{f \in C^1[0,1] : f(0) = f(1)\}$;

(f) $Ff := f'$, $D(F) = \{f \in C^1[0,1] : f'(0) = f'(1)\}$;

(g) $Gf := f''$, $D(G) = C^2[0,1]$;

(h) $Hf := f''$, $D(H) = \{f \in C^2[0,1] : f(0) = f(1) = 0\}$;

(i) $If := f''$, $D(I) = \{f \in C^2[0,1] : f'(0) = f''(1) = 0\}$;

(j) $Jf := f''$, $D(J) = \{f \in C^2[0,1] : f''(0) = 0\}$.

4.2. Feladat. Legyen A egy operátor az X Banach-téren, és legyen B az A egy megszorítása. Mutassuk meg, hogy ha B szürjektív és A injektív, akkor $A = B$! Ez az eset fennáll például, ha $B \subset A$ és $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$.

4.3. Feladat. Tegyük fel, hogy valamely $t_0 > 0$ esetén $r(T(t_0)) \in P\sigma(T(t_0))$ teljesül. Igazoljuk, hogy ekkor az (SKeNK) egyenlőség fennáll, vagyis $s(A) = \omega_0$!

5. fejezet

Félcsoportok aszimptotikája

Ebben a fejezetben a félcsoportelmélet egyik legfontosabb részével, a félcsoportok aszimptotikájával fogunk foglalkozni. Azt a kérdést vizsgáljuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} T(t)$$

létezik-e, és ha igen, milyen topológiában.

Korábban láttuk, hogy az operátorfélcsoportok tulajdonképpen a

$$\text{(ACP)} \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) &= Au(t), \quad t \geq 0; \\ u(0) &= x, \end{cases}$$

alakú absztrakt Cauchy-problémák megoldásai. Ezért aszimptotikus tualjdonságaik vizsgálata egyben ezen megoldások végtelenben való viselkedésének leírására szolgál.

5.1. Félcsoportok stabilitása

Stabilitás alatt azt értjük, hogy a $T(t)$ operátorok 0-hoz tartanak, ha $t \to \infty$. Mivel azonban az operátorok (általában) végtelen dimenziós tereken vannak értelmezve, ezért meg kell különböztetnünk, hogy milyen értelemben vizsgáljuk a konvergenciát. Az 1.28. Definícióban már értelmeztük egy félcsoport *egyenletes exponenciális stabilitását*, és az 1.29. Állításban azt is láttuk, hogy egyenletesen folytonos operátorfélcsoportok esetén ez ekvivalens azzal, hogy a $T(t)$ operátorok normái 0-hoz tartanak végtelenben. Most bevezetjük erősen folytonos operátorfélcsoportok különböző stabilitási fogalmait.

5.1. Definíció. A $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoportról azt mondjuk, hogy

(a) *egyenletesen exponenciálisan stabil*, ha létezik $\varepsilon > 0$, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\varepsilon t}\|T(t)\| = 0;$$

(b) *egyenletesen stabil*, ha

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0;$$

(c) *erősen stabil*, ha

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0, \quad \text{minden } x \in X \text{ esetén;}$$

(d) *gyengén stabil*, ha

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(T(t)x) = 0, \quad \text{minden } x \in X,\ \varphi \in X^* \text{ esetén.}$$

Idézzük fel a $T = (T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport növekedési korlátjának definícióját!

$$\omega_0 = \omega_0(T) = \inf\left\{w \in \mathbb{R} : \exists\, M_w \geq 1,\ \text{melyre } \|T(t)\| \leq M_w \cdot \mathrm{e}^{wt},\ t \geq 0\right\}$$

5.2. Állítás. *Egy félcsoport pontosan akkor egyenletesen exponenciálisan stabil, ha*

$$\omega_0 < 0. \tag{5.1}$$

Bizonyítás. Ha a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport egyenletesen exponenciálisan stabil, akkor $t \to \infty$ esetén $\mathrm{e}^{\varepsilon t}\|T(t)\| \to 0$, így létezik olyan $t_0 > 0$, hogy

$$\mathrm{e}^{\varepsilon t}\|T(t)\| \leq 1, \quad t > t_0.$$

Mivel $\sup_{t\in[0,t_0]} \|T(t)\|$ korlátos, ezért létezik olyan $M \geq 1$, amelyre $\mathrm{e}^{\varepsilon t}\|T(t)\| \leq M$, így $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{-\varepsilon t}$ teljesül minden $t \geq 0$ esetén. Tehát $\omega_0 < 0$.
Megfordítva, ha $\omega_0 < 0$, akkor létezik olyan $w < 0$, $M \geq 1$, amelyekre

$$\|T(t)\| \leq M \cdot \mathrm{e}^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\mathrm{e}^{-\frac{w}{2}t}\|T(t)\| \leq M \cdot \mathrm{e}^{\frac{w}{2}t} \to 0, \quad t \to \infty,$$

tehát $(T(t))_{t\geq 0}$ egyenletesen exponenciálisan stabil $\varepsilon = -\frac{w}{2} > 0$ választással. $\square$

Az alábbiakban kiderül, hogy a két egyenletes stabilitási fogalom ekvivalens egymással.

5.3. Állítás. *Legyen* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $(T(t))_{t\geq 0}$ *egyenletesen exponenciálisan stabil;*

(ii) $(T(t))_{t\geq 0}$ *egyenletesen stabil;*

(iii) Létezik $\varepsilon > 0$, *hogy*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\varepsilon t}\|T(t)x\| = 0, \quad \textit{minden } x \in X \textit{ esetén.}$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $(i) \Rightarrow (ii)$ és $(i) \Rightarrow (iii)$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: A 4.18. Állítás szerint

$$\mathrm{e}^{\omega_0 t} = r(T(t)) \leq \|T(t)\|, \quad t \geq 0,$$

ezért (ii)-ből következik, hogy $\omega_0 < 0$, tehát (i) teljesül.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel most, hogy (iii) fennáll. Ekkor az $(\mathrm{e}^{\varepsilon t}T(t))_{t\geq 0}$ operátorcsalád pontonként korlátos, tehát az egyenletes korlátosság tétele miatt egyenletesen is korlátos. Így létezik olyan $M \geq 1$ szám, hogy

$$\mathrm{e}^{\varepsilon t}\|T(t)\| \leq M, \quad t \geq 0,$$

tehát

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{\varepsilon}{2}t}\|T(t)\| = 0,$$

vagyis (i) fennáll. □

A definícióból adódik, hogy az egyenletes stabilitásból következik a erős, abból pedig a gyenges stabilitás. A fordított állítások azonban nem igazak.

5.4. Példa. Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ a baleltolás-félcsoport $X = L^p(\mathbb{R}_+)$-on, $1 \leq p < \infty$. Ez a félcsoport erősen stabil, azonban

$$\|T(t)\| = 1, \quad t \geq 0,$$

tehát nem egyenletesen stabil.

A 4.18. Állításban láttuk, hogy

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| = \frac{1}{t_0} \ln r(T(t_0)) \tag{5.2}$$

minden $t_0 > 0$ esetén. Ezek alapján könnyen igazolható a következő állítás.

5.5. Állítás. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $\omega_0 < 0$*, azaz* $(T(t))_{t\geq 0}$ *egyenletesen exponenciálisan stabil;*

(ii) $\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0$*, azaz* $(T(t))_{t\geq 0}$ *egyenletesen stabil;*

(iii) Létezik olyan $t_0 > 0$, amelyre $\|T(t_0)\| < 1$ teljesül;

(iv) Létezik olyan $t_1 > 0$, amelyre $r(T(t_1)) < 1$ teljesül.

Vegyük észre, hogy az 5.3. Állítás (i), (ii), ill. (iii) pontjai éppen az 5.5. Állítás (i), (ii), ill. (iii) pontjaival ekvivalensek.

Nézzük most, mit mondhatunk a

$$\xi_x : t \mapsto T(t)x$$

pályák viselkedéséről! Az egyenletes exponenciális stabilitás ekvivalens azzal, hogy léteznek olyan $M \geq 1$, $\varepsilon > 0$ számok, amelyekre

$$\|T(t)x\| \leq M\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\|x\|$$

minden $t \geq 0$, $x \in X$ esetén. Ebből következik, hogy a ξ_x pályák $L^p(\mathbb{R}_+, X)$-beli függvények minden $1 \leq p < \infty$ esetén, vagyis

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p \,\mathrm{d}t < \infty$$

minden $x \in X$ esetén. Az alábbi tétel azt mondja ki, hogy ezen állítás megfordítása is igaz.

5.6. Tétel (Datko 1970, Pazy 1972)**.** *Egy $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport pontosan akkor egyenletes exponenciális stabil, ha valamely/minden $p \in [1, \infty)$ esetén*

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|^p \,\mathrm{d}t < \infty \tag{5.3}$$

minden $x \in X$ vektorra.

Bizonyítás. Ha a félcsoport exponenciálisan stabil, akkor a korábbi meggondolás szerint (5.3) fennáll. A fordított irány bizonyításához az 5.5. Állítás alapján elég megmutatni, hogy ha (5.3) fennáll, akkor

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0 \tag{5.4}$$

teljesül. Ebből a célból vezessük be a

$$T_n x := \chi_{[0,n]}(\cdot)T(\cdot)x, \quad n \in \mathbb{N}$$

operátorokat.

1. Megmutatjuk, hogy $T_n \in \mathcal{L}(X, L^p(\mathbb{R}_+, X))$. Ugyanis,

$$\begin{aligned}\|T_n x\|_{L^p}^p &= \int_0^\infty \|\chi_{[0,n]}(t)T(t)x\|^p \,\mathrm{d}t = \int_0^n \|T(t)x\|^p \,\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^n M_n^p \|x\|^p \,\mathrm{d}t = nM_n^p\|x\|^p,\end{aligned}$$

   ahol $M_n = \sup_{t\in[0,n]} \|T(t)\|$.

2. Belátjuk, hogy létezik olyan $C > 0$, amelyre az előbbi levezetésben $nM_n^p \le C^p$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A feltétel szerint minden $x \in X$ vektorra a

$$\{T_n x : n \in \mathbb{N}\} \subset L^p(\mathbb{R}_+, X)$$

   halmaz korlátos, ugyanis például az

$$R := \int_0^\infty \|T(t)x\|^p \,\mathrm{d}t$$

   számmal a 0 középpontú, R sugarú zárt gömbben vannak. Tehát, az egyenletes korlátosság tétele miatt létezik olyan $C > 0$ szám, hogy

$$\int_0^t \|T(r)x\|^p \, dr \le C^p\|x\|^p, \quad x \in X, t \ge 0.$$

3. Most megmutatjuk, hogy a $(T(t))_{t\ge0}$ félcsoport korlátos, tehát létezik olyan $L > 0$, hogy $\|T(t)\| \le L$ minden $t \ge 0$ esetén. Az 1.54. Állítás alapján léteznek olyan $M \ge 1$ és $w > 0$ számok, amelyekre

$$\|T(t)\| \le M \cdot \mathrm{e}^{wt}, \quad t \ge 0.$$

(Megjegyezzük, hogy ha $w = 0$ is választható lenne, akkor a korlátosságot beláttuk. Ha pedig $w < 0$ választható, akkor a tételt is beláttuk.) Így kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1-\mathrm{e}^{-pwt}}{pw} \cdot \|T(t)x\|^p &= \int_0^t \mathrm{e}^{-pwr}\|T(r)T(t-r)x\|^p\,dr \\ &\le \int_0^t M^p\|T(t-r)x\|^p\,dr \\ &\le M^pC^p\|x\|^p, \quad x \in X, t \ge 0.\end{aligned}$$

Ebből, ha $t \ge 1$, akkor

$$\|T(t)x\|^p \le \frac{pw}{1-\mathrm{e}^{-pw}}M^pC^p\|x\|^p, \quad x \in X.$$

Mivel $\sup_{t\in[0,1]}\|T(t)\| < \infty$, ezért kapjuk, hogy létezik olyan $L > 0$ konstans, melyre

$$\|T(t)\| \le L, \quad t \ge 0.$$

4. Utolsó lépésként megmutatjuk, hogy $\lim_{t\to\infty}\|T(t)\| = 0$. Az előbbieket felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}t\|T(t)x\|^p &= \int_0^t \|T(t-r)T(r)x\|^p\,dr \\ &\le \int_0^t L^p\|T(r)x\|^p\,dr \\ &\le L^pC^p\|x\|^p, \quad x \in X, t \ge 0.\end{aligned}$$

Tehát

$$\|T(t)\| \le LCt^{-\frac{1}{p}}, \quad t > 0,$$

amiből (5.4) következik. □

A fenti stabilitási kritériumok hátránya az, hogy ellenőrzésükhöz ismernünk kell a félcsoportot. Márpedig legtöbb esetben csak a generátort vagy/és annak rezolvensét ismerjük. Ezért van szükségünk a spektrálelméletre. Az 1.20. és az 1.30. Tételekben mátrix- ill. egyenletesen folytonos félcsoportokra mondtunk ki a generátor spektrálkorlátjára vonatkozó stabilitási kritériumokat, vagyis ezekben az esetekben az

$$s(A) < 0 \tag{5.5}$$

feltétel ekviavelens az egyenletes (exponenciális) stabilitással. Az ellenpéldák (ld. a 4.32. Példát) mutatják, hogy ez általában tetszőleges félcsoportra nem teljesül. Másrészt, ha valamilyen (gyenge) spektrálleképezés-tétel teljesül a félcsoportra és generátorára, akkor ω_0 és $s(A)$ egyenlő, tehát az (5.5) egyenlőtlenségből következik (5.1).

5.7. Lemma. *Ha a $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoportra és $(A, D(A))$ generátorára a gyenge spektrálleképezés-tétel teljesül, vagyis*

$$\text{(GySLT)} \qquad \sigma(T(t) \cup \{0\} = \overline{\mathrm{e}^{t\sigma(A)}} \cup \{0\}, \quad t \geq 0,$$

akkor

$$s(A) = \omega_0$$

is teljesül.

Bizonyítás. Idézzük fel az (5.2) egyenlőséget:

$$\omega_0 = \frac{1}{t} \ln r(T(t)), \quad \text{minden } t > 0\text{-ra.}$$

Mivel a 2.22. Következmény szerint $-\infty \leq s(A) \leq \omega_0$, tegyük fel, hogy $-\infty < \omega_0$, és így

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{1}{t} \ln \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(T(t))\} = \frac{1}{t} \ln \sup\{|\mathrm{e}^{t\lambda}| : \lambda \in \sigma(A)\} \\
&= \frac{1}{t} \ln \sup\{\mathrm{e}^{t \operatorname{Re} \lambda} : \lambda \in \sigma(A)\} = \sup\Big\{\frac{1}{t} \ln \mathrm{e}^{t \operatorname{Re} \lambda} : \lambda \in \sigma(A)\Big\} \\
&= s(A).
\end{aligned}$$

□

Most kimondjuk a Ljapunov stabilitási tétel végtelen dimenziós változatát, ld. a 4.37. Következményt.

5.8. Tétel. *Egy $(T(t))_{t\geq 0}$ normafolytonos félcsoport pontosan akkor egyenletesen exponenciálisan stabil, ha generátorának $s(A)$ spektrálkorlátja negatív, vagyis*

$$s(A) < 0.$$

Bizonyítás. A 4.37. Következmény alapján $s(A) = \omega_0$, így az állítás az 5.2. Állításból adódik. □

A következő tétel Hilbert-téren értelmezett félcsoportokra mond ki olyan stabilitási feltételt, amelyhez nem szükséges a félcsoport ismerete.

5.9. Tétel (Gearhart 1978, Prüss 1984, Greiner 1985)**.** *Legyen* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport a* H *Hilbert-téren, legyen generátora* $(A, D(A))$. *Ekkor a félcsoport pontosan akkor egyenletesen exponenciálisan stabil, ha*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A),$$

és

$$M := \sup_{\operatorname{Re} \lambda > 0} \|R(\lambda, A)\| < \infty. \tag{5.6}$$

Bizonyítás. Ha $\omega_0 < 0$, akkor az (5.6) becslés a 2.17. Tételből következik. A másik irány bizonyításához vegyük észre, hogy a 4.11. Következmény alapján $\mathrm{i}\mathbb{R} \subset \rho(A)$ is teljesül, tehát az (5.6) becslés a rezolvensleképezés folytonossága miatt $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ esetén is igaz. Legyen $w > |\omega_0| + 1$, és tekintsük a

$$T_{-w}(t) := \mathrm{e}^{-wt} T(t), \quad t \geq 0$$

átskálázott félcsoportot! Ekkor $(T_{-w}(t))_{t\geq 0}$ egyenletesen exponenciálisan stabil. A 2.17. Tétel (a) pontjából következik, hogy minden $x \in H$, $s \in \mathbb{R}$ esetén

$$R(w + \mathrm{i}s, A)x = R(\mathrm{i}s, A - w)x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}st} T_{-w}(t)x \, \mathrm{d}t.$$

Az $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}, H) \to L^2(\mathbb{R}, H)$ Fourier-transzformációra

$$R(w + \mathrm{i}s, A)x = \mathcal{F}(T_{-w}(\cdot)x)(s),$$

ahol a $T_{-w}(\cdot)$ operátorokat úgy terjesztjük ki $\mathbb{R}$-re, hogy $T_{-w}(t) := 0$, ha $t < 0$. Mivel a $(T_{-w}(t))_{t\geq 0}$ félcsoport egyenletesen exponenciálisan stabil, ezért

$$T_{-w}(\cdot)x \in L^2(\mathbb{R}, H).$$

A Plancherel-tétel alapján

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(w + \mathrm{i}s, A)x\|^2 \, \mathrm{d}s = 2\pi \int_0^{+\infty} \|T_{-w}(t)x\|^2 \, \mathrm{d}t,$$

így létezik olyan $L > 0$ szám, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(w+\mathrm{i}s, A)x\|^2 \,\mathrm{d}s \le L^2 \|x\|^2$$

minden $x \in H$ esetén. A (4.3) rezolvensegyenlőség miatt

$$R(\mathrm{i}s, A) = R(w+\mathrm{i}s, A) + wR(\mathrm{i}s, A)R(w+\mathrm{i}s, A)$$

minden $s \in \mathbb{R}$ esetén, tehát

$$\|R(\mathrm{i}s, A)x\| \le (1 + Mw) \cdot \|R(w+\mathrm{i}s, A)x\|$$

teljesül minden $s \in \mathbb{R}$ és $x \in H$ elemre. Így

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(\mathrm{i}s, A)x\|^2 \,\mathrm{d}s &\le (1+Mw)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \|R(w+\mathrm{i}s, A)x\|^2 \,\mathrm{d}s \\ &\le (1+Mw)^2 \cdot L^2 \cdot \|x\|^2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

minden $x \in H$-ra. Mivel $\|T\| = \|T^*\|$ minden $T \in \mathcal{L}(H)$ korlátos operátorra, ezért a kapott becslés igaz az adjungált $(T^*(t))_{t\ge 0}$ félcsoport generátorára, A^*-ra is (ld. a 2.2.1. alpontot), vagyis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(\mathrm{i}s, A^*)y\|^2 \,\mathrm{d}s \le (1+Mw)^2 \cdot L^2 \cdot \|y\|^2 \tag{5.8}$$

minden $y \in H$-ra.

A következőkben felhasználunk egy, a jegyzetben nem szereplő ún. *inverziós formulát*. Ez alapján minden $x \in D(A^2)$ és $y \in H$ esetén

$$\begin{aligned} (tT(t)x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{(w+\mathrm{i}s)t} \Big(R(w+\mathrm{i}s, A)^2 x, y \Big) \,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}st} \left(R(\mathrm{i}s, A)x, R(-\mathrm{i}s, A^*)y \right) \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség a Cauchy-féle integrálformula alapján igaz, mivel $R(\lambda, A)$ egyenletesen korlátos $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$-ra, és így

$$\|R(\lambda, A)x\| = \frac{1}{|\lambda|} \|R(\lambda, A)Ax + x\| \le \frac{1}{|\lambda|} (M\|Ax\| + \|x\|),$$

ha $x \in D(A^2)$. Felhasználva az (5.7) és az (5.8) becsléseket, valamint a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |(tT(t)x, y)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(\mathrm{i}s, A)x\|^2 \, \mathrm{d}s \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|R(\mathrm{i}s, A^*)x\|^2 \, \mathrm{d}s \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{(1 + Mw)^2 \cdot L^2}{2\pi} \cdot \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

minden $x, y \in D(A^2)$ esetén. Mivel $D(A^2)$ sűrű H-ban, ezért

$$\begin{aligned} \|tT(t)x\| &= \sup\{|(tT(t)x, y)| : x, y \in D(A^2), \|x\| = \|y\| = 1\} \\ &\leq \frac{(1 + Mw)^2 \cdot L^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\lim_{t \to \infty} \|T(t)\| = 0,$$

így $\omega_0 < 0$ az 5.5. Állítás alapján. □

A következő tétel korlátos félcsoportok erős stabilitásához szolgáltat a generátorra vonatkozó kritériumot. A feltételek között szerepel A ún. *Banach-adjungáltja.* Ezt az alábbi módon definiálhatjuk. A definícióban

$$\langle x, \varphi \rangle := \varphi(x), \quad \varphi \in X^*, x \in X.$$

5.10. Definíció. Legyen $(A, D(A))$ sűrűn definiált operátor az X Banach-téren. Ekkor A *adjungáltja*, A^* a következő operátor X^*-on:

$$\begin{aligned} &D(A^*) = \{x^* \in X^* : \exists y^* \in X^*, \text{ amelyre } \langle Ax, x^* \rangle = \langle x, y^* \rangle \text{ minden } x \in D(A) \text{ esetén}\}, \\ &\quad A^* x^* := y^*, \quad x^* \in D(A^*). \end{aligned}$$

5.11. Tétel (Arendt, Batty, Lyubich, Vũ, 1988)**.** *Legyen* $(T(t))_{t \geq 0}$ *korlátos erősen folytonos félcsoport, generátora* $(A, D(A))$*. Ha*

1. $P\sigma(A^*) \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = \emptyset$*,*

2. $\sigma(A) \cap \mathrm{i}\mathbb{R}$ *megszámlálható,*

akkor $(T(t))_{t \geq 0}$ *erősen stabil, vagyis*

$$\lim_{t \to \infty} T(t)x = 0, \quad \text{minden } x \in X\text{-re}.$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

5.2. Félcsoportok hiperbolicitása

Ebben az alfejezetben a korábban látott stabilitási tételekre alapozva megpróbáljuk a félcsoportokat egy *stabil* és egy *instabil* részre bontani. Általában ez természetesen nem mindig tehető meg, ezért szükségünk lesz az alábbi fogalomra.

5.12. Definíció. A $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoportról azt mondjuk, hogy *hiperbolikus* az X Banach-téren, ha X-et felbonthatjuk X_s és X_u zárt, $T(t)$-invariáns alterek direktösszegére, vagyis

$$X = X_s \oplus X_u, \tag{5.9}$$

és a felbontásra a következők teljesülnek:

(a) Jelölje $(T_s(t))_{t\geq 0}$ a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport megszorítását X_s-re. Ekkor $(T_s(t))_{t\geq 0}$ egyenletesen exponenciálisan stabil X_s-en.

(b) Jelölje $(T_u(t))_{t\geq 0}$ a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport megszorítását X_u-ra. Ekkor a $T_u(t)$ operátorok invertálhatók X_u-n, és $(T_u(t))_{t\geq 0}^{-1}$ egyenletesen exponenciálisan stabil X_u-n.

Könnyen belátható az alábbi állítás.

5.13. Állítás. *Egy $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport pontosan akkor hiperbolikus, ha létezik egy P korlátos projekció X-en, továbbá $M, \varepsilon > 0$ konstansok, hogy $T(t)$ kommutál P-vel minden t-re, $T(t) \ker P = \ker P$, továbbá*

$$\|T(t)x\| \leq M\mathrm{e}^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0, x \in \operatorname{ran} P; \tag{5.10}$$

$$\|T(t)x\| \geq \frac{1}{M}\mathrm{e}^{\varepsilon t}, \quad t \geq 0, x \in \ker P. \tag{5.11}$$

A következőkben a hiperbolicitást a félcsoport spektrumának segítségével jellemezzük.

5.14. Állítás. *Legyen $(T(t))_{t\geq 0}$ erősen folytonos félcsoport. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

(i) $(T(t))_{t\geq 0}$ *hiperbolikus;*

(ii) $\sigma(T(t)) \cap \Gamma = \emptyset$ *valamely/minden* $t > 0$ *esetén, ahol* $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *az egységkör.*

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$: Ha $(T(t))_{t\geq 0}$ hiperbolikus, akkor az (5.9) direktösszeg-felbontás miatt

$$\sigma(T(t)) = \sigma(T_s(t)) \cup \sigma(T_u(t)).$$

Mivel $(T_s(t))_{t\geq 0}$ egyenletesen exponenciálisan stabil, ezért $r(T_s(t)) < 1$, $t > 0$, így $\sigma(T_s(t)) \cap \Gamma = \emptyset$. Hasonlóan kapjuk, hogy $r(T_u(t)^{-1}) < 1$. Mivel

$$\sigma(T_u(t)) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T_u(t)^{-1})\},$$

ezért minden $\lambda \in \sigma(T_u(t)$ esetén $|\lambda| > 1$, tehát $\sigma(T_u(t)) \cap \Gamma = \emptyset$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Legyen $h > 0$ olyan, hogy $\sigma(T(h)) \cap \Gamma = \emptyset$. Legyen P a

$$\{\lambda \in \sigma(T(h)) : |\lambda| < 1\}$$

halmazhoz tartozó spektrálprojekció (ld. a 4.12. Definíciót). Ekkor az X tér felbomlik mint

$$X = X_s \oplus X_u,$$

ahol $X_s = \operatorname{ran} P$, $X_u = \ker P$ $T(h)$-invariáns alterek. Legyen $T_s(h) \in \mathcal{L}(X_s)$ a $T(h)$ operátor X_s-re való megszorítása. Ekkor

$$\sigma(T_s(h)) = \{\lambda \in \sigma(T(h)) : |\lambda| < 1\},$$

tehát $r(T_s(h)) < 1$. Az 5.5. Állítás (iv) pontja szerint a

$$(T_s(t))_{t\geq 0} := (PT(t))_{t\geq 0}$$

félcsoport egyenletesen exponenciálisan stabil.
Hasonlóan, ha $T_u(h) \in \mathcal{L}(X_u)$ jelöli a $T(h)$ operátor X_u-ra való megszorítását, akkor

$$\sigma(T_u(h)) = \{\lambda \in \sigma(T(h)) : |\lambda| > 1\},$$

tehát $T_u(h)$ invertálható X_u-n. Ebből következik, hogy $T_u(t)$ is invertálható, ha $0 \leq t \leq h$, míg ha $t > h$, akkor válasszunk olyan n-et, amelyre $nh > t$. Így

$$T_u(h)^n = T_u(nh) = T_u(nh - t)T_u(t) = T_u(t)T_u(nh - t),$$

tehát $T_u(t)$ is invertálható, mivel $T_u(h)$ is az. Továbbá, $r(T_u(h)) > 1$, és az 5.5. Állítás (iv) pontjából következik a $(T_u(t))_{t\geq 0}^{-1}$ félcsoport egyenletes exponenciális stabilitása. □

A hiperbolicitás fenti karakterizációjához szükséges a félcsoport ismerete. A következő tétel arról szól, hogy ha a spektrálleképezés-tételhez (ld. a 4.36. Tételt ill. az (SLT) feltételt) hasonló összefüggés áll fenn a félcsoportra, akkor az A generátor ill. $\sigma(A)$ ismeretében is eldönthető a hiperbolikusság.

5.15. Tétel. *Legyen* $(A, D(A))$ *a* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport generátora. Tegyük fel, hogy a* $\sigma(A)$ *és a* $\sigma(T(t))$ *spektrumok kielégítik az alábbi összefüggést:*

$$\sigma(T(t)) \subset \Gamma \cdot \mathrm{e}^{t\sigma(A)} = \{z\mathrm{e}^{t\lambda} : \lambda \in \sigma(A), |z| = 1\}, \text{ minden } t \geq 0\text{-ra.} \tag{5.12}$$

Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

(i) $(T(t))_{t\geq 0}$ *hiperbolikus;*

(ii) $\sigma(T(t)) \cap \Gamma = \emptyset$ *egy/minden* $t > 0$ *esetén;*

(iii) $\sigma(A) \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = \emptyset$.

Bizonyítás. $(i) \Leftrightarrow (ii)$: Az 5.14. Állításban láttuk.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: A 4.33. Tétel szerint minden félcsoportra teljesül.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: Könnyen látható, hogy az (5.12) tartalmazás fennállása esetén teljesül. □

Hilbert-terek esetén az 5.9. Gearhart–Prüss–Greiner-tételt felhasználva az (5.12) feltételt az imaginárius tengelyre megszorított rezolvens normájának becslésével helyettesíthetjük.

5.16. Tétel. *Legyen* $(A, D(A))$ *a* $(T(t))_{t\geq 0}$ *erősen folytonos félcsoport generátora a* H *Hilbert-téren. Ekkor* $(T(t))_{t\geq 0}$ *pontosan akkor hiperbolikus, ha*

$$\sigma(A) \cap \mathrm{i}\mathbb{R} = \emptyset \text{ és } \|R(\lambda, A)\| \leq M, \ \lambda \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

5.3. Feladatok

5.1. Feladat. Jellemezzük a különböző stabilitási fogalmakat – a q függvény tulajdonságaiból kiindulva – az $L^p(\mathbb{R})$-en ill. $C_0(\mathbb{R})$-en értelmezett $(T_q(t))_{t\geq 0}$ szorzásfélcsoportok esetén!

5.2. Feladat. Igazoljuk, hogy egy gyengén stabil kompakt félcsoport szükségképpen egyenletesen exponenciálisan stabil!

5.3. Feladat. Legyen A egy Hilbert-téren értelmezett erősen folytonos félcsoport generátora. Mutassuk meg, hogy félcsoport növekedési korlátjára

$$\omega_0 = \inf\Big\{\lambda > s(A) : \sup_{s\in\mathbb{R}} \|R(\lambda + \mathrm{i}s)\| < \infty\Big\}.$$

5.4. Feladat. Igazoljuk, hogy az 5.12. Definícióban szereplő direktösszeg-felbontás teljesül, ha

$$\sigma(T(t)) \cap \alpha\Gamma = \emptyset$$

fennáll valamely $\alpha > 0$ esetén. (Segítség: Skálázzuk át a félcsoportot és az (5.10) és az (5.11) becsléseket!)

5.5. Feladat. Tegyük fel, hogy a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport kielégíti az (5.10) és az (5.11) becsléseket egy olyan P korlátos projekcióval, ami kommutál $T(t)$-vel minden $t \geq 0$ esetén. Tegyük fel, hogy valamely $t_0 > 0$ számra a $T(t_0)$ operátor $\ker P$-re való $T_u(t_0)$ megszorítása kompakt. Igazoljuk, hogy ekkor $\dim \ker P < \infty$ és $(T(t))_{t\geq 0}$ hiperbolikus!

5.6. Feladat. Legyen A egy $(T(t))_{t\geq 0}$ hiperbolikus félcsoport generátora. Mutassuk meg, hogy A invertálható, és az inverzére

$$A^{-1}x = \int_0^\infty T_u(t)^{-1}(\mathrm{Id} - P)x\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty T_s(t)Px\,\mathrm{d}t$$

teljesül! Igazoljunk hasonló előállítást az $R(\lambda, A)$ operátorokra is $\operatorname{Re}\lambda < \varepsilon$ esetén, ahol ε az (5.10) és az (5.11) becslésekben szereplő konstans!

Jegyzetünket a félcsoportelmélet „atyjaként” számontartott Einar Hille egyik híres idézetével zárjuk 1948-ból.
„I hail a semi-group when I see one and I seem to see them everywhere. Friends have observed, however, that there are mathematical objects which are not semi-groups.” Magyarul: *Üdvözlöm, ha látok egy félcsoportot, és úgy tűnik, hogy mindenütt látom őket. Barátaim megfigyelték azonban, hogy vannak olyan matematikai objektumok, amelyek nem félcsoportok.*

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[EN00] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Springer, 2000.

[ISEM] 15th Internet Seminar on ”Operator Semigroups for Numerical Analysis”, elektronikus jegyzet `https://isem-mathematik.uibk.ac.at/isemwiki/index.php/Overview`