Fokszám-sorozatok realizálása

Célunk azt megvizsgálni, hogy adott $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ nemnegatív egész számokhoz mikor van olyan gráf, amelyben pontosan ezek a fokszámok. Azaz legyen $V = \{1, \ldots, n\}$ és el szeretnénk érni, hogy az i csúcs foka d_i legyen. A legegyszerűbb esetben hurokéleket, sőt többszörös hurokéleket is megengedünk, majd a hurokéleket megtiltjuk, végül az *egyszerű gráfok* esetét vizsgáljuk meg.

Állítás. Ha a $d_1, \ldots, d_n$ sorozatra teljesül, hogy $d_1 + \ldots + d_n$ páros, akkor létezik olyan (többszörös) hurokéleket tartalmazó gráf, amelyben a fokszámok $d_1, \ldots, d_n$.

Bizonyítás. Legyen az i csúcsban egy $[d_i/2]$-szeres hurokél. Ha ezeket berajzoltuk, minden csúcsban még 0 vagy 1 él hiányzik. Mivel a d_i-k összege páros, itt páros sok egyes marad. Ezeket tetszőlegesen összekötve páronként, a kívánt tulajdonságú gráfot kapunk. ∎

Ha a hurokéleket megtiltjuk, akkor nem lehetnek túl nagy fokú pontok, hiszen ha egy pontban nem lehet hurokél, akkor az innen kiinduló élek másik végét a többi pont képes kell legyen befogadni. Az állítás precízen az alábbi.

Állítás. Akkor és csak akkor létezik olyan hurokél nélküli gráf, amelyben a fokszámok $d_1, \ldots, d_n$, ha egyrészt a d_i-k összege páros, másrészt minden d_i legfeljebb akkora, mint az összes többi fokszám összege. Nyilván ezt elég a legnagyobb fokszámra megkövetelni. Ha d_n a legnagyobb fokszám, akkor feltételünk ($d_1 + \ldots + d_{n-1} \ge d_n$ és $d_1 + \ldots + d_n$ páros) alakba írható.

Bizonyítás. A tétel előtti okoskodás mutatja a feltétel szükségességét, így csak azt kell belátnunk, hogy $d_1 + \ldots + d_{n-1} \ge d_n$ garantálja a kívánt gráf létezését. Nagyon egyszerű dolgunk van, ha $d_1 + \ldots + d_{n-1} = d_n$. Ekkor nem is tudunk mást tenni, mint hogy az i és az n csúcsokat pontosan d_i db párhuzamos éllel kötjük össze.

Ha $d_1 + \ldots + d_{n-1} > d_n$, akkor először is vegyük észre, hogy a bal oldal és a jobb oldal ugyanolyan paritású, így különbségük legalább 2. Ha mondjuk $d_i > 0$ és $d_j > 0$, $(i, j \le n-1)$ akkor húzzunk be egy élt i és j közé. Ezzel eggyel-eggyel csökkentettük i és j fokát, ami azt eredményezi, hogy a bal oldali összeget kettővel csökkentettük. Ezután tehát a $d_1, \ldots, d'_i = d_i - 1, \ldots, d'_j = d_j - 1, \ldots, d_{n-1}, d_n$ fokszámokkal kell hurokél nélküli gráfot rajzoljunk. Folytassuk ezt az eljárást mindaddig amíg a fokszámcsökkentések után d_n nem lesz azonos a módosított $d''_1, \ldots, d''_{n-1}$ fokszámok összegével. Ekkor a bizonyítás első részében leírt módon fejezhetjük be gráfunk konstrukcióját. ∎

Természetesen a bizonyításban leírt csökkentést gyorsíthatjuk, ha az i és j csúcsok közé többszörös éleket rajzolunk.

A legérdekesebb kérdés az, hogy az adott fokszámokkal *egyszerű gráf* létezik-e. Erre először egy olyan szükséges feltételt adunk, amely a fenti (hurokél nélküli gráfokra vonatko]-zó) állításnak általánosítása.

Állítás. Ha létezik egyszerű gráf a $(0 \leq)d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ fokszámokkal, akkor tetszőleges k-ra $d_1 + \ldots + d_{n-k} \geq d_{n-k+1} + \ldots + d_n - k(k-1)$.

Bizonyítás. Nevezzük a $d_1, \ldots, d_{n-k}$ csúcsokat kis fokúaknak, a többit nagynak. Adjunk becslést az olyan élek számára, amelyek egyik végpontja kis fokú, másik végpontja nagy. Egyfelől az ilyen élek száma legfeljebb $d_1 + \ldots + d_{n-k}$, hiszen a kis fokú csúcsokból összesen ennyi indul. (Minden olyan él, amely két kis fokú csúcsot köt össze, kettővel csökkenti a kis-nagy élek számát.) A nagy fokú csúcsok oldaláról számolva, egy d_i fokú csúcsból legfeljebb $k-1$ él mehet nagy fokú csúcsba, így legalább $d_i - (k-1)$ él kell kis fokú csúcsba menjen. Összeadva ezt a nagy fokú csúcsokra alsó becslést kapunk a megszámolni kívánt élekre. Összevetve a korábbi felső becsléssel éppen a kívánt állítást kapjuk. ∎

Az állítás szemléletes tartalma tehát az, hogy a csúcsokat kis és nagy fokszámúakra bontva a kis fokszámú csúcsok legyenek képesek befogadni azokat az éleket, amelyek a nagy fokú csúcsokból muszáj, hogy kis fokúakhoz menjenek. Mivel ez szükséges feltétel, segítségével azt láthatjuk, hogy az adott fokszámsorozat nem realizálható egyszerű gráffal. Ha találunk olyan k-t, amelyre nem teljesül az állításbeli feltétel, akkor nem létezhet egyszerű gráf az adott fokszámokkal.

A most következő állítás egyben eljárást is ad a kérdés megválaszolására. Szemléletesen úgy fogalmazhatjuk az állítást, hogy ha van adott fokszámokkal egyszerű gráf, akkor van olyan egyszerű gráf is az adott fokszámokkal, amelyben a legnagyobb fokú csúcs az utána közvetlenül következő legnagyobb fokúakkal van összekötve.

Állítás. Akkor és csak akkor létezik egyszerű gráf a $(0 \leq)d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ fokszámokkal, ha létezik egyszerű gráf a $d'_1, d'_2, \ldots d'_{n-1}$ fokszámokkal, ahol $d'_k = d_k$, ha $k = 1, \ldots, n - d_n - 1$, $d'_k = d_k - 1$, ha $k = n - d_n, \ldots, n-1$.

Bizonyítás. Ha a d'_i számok a G' egyszerű gráf fokszámai, akkor egy v új csúcsot felvéve és összekötve G'-nek a $d'_k = d_k - 1$, $(k = n - d_n, \ldots, n-1)$ fokú csúcsaival, a kapott n csúcsú (egyszerű) gráf fokszámai pontosan $d_1, d_2, \ldots, d_n$ lesznek.

Megfordítva, legyen G egyszerű gráf a $d_1, d_2, \ldots, d_n$ fokszámokkal és jelöljük a d_k fokszámú csúcsot v_k-val. Legyen $p = n - d_n$. Azt állítjuk, hogy G választható úgy, hogy v_n szomszédos v_k-val, ha $k = p, \ldots, n-1$, de más ponttal nem.

Válasszuk G-t (azon gráfok közül, amelyekre v_i foka d_i) úgy, hogy v_n a $v_p, \ldots, v_{n-1}$ pontok közül a lehető legtöbb ponttal legyen szomszédos. Megmutatjuk, hogy ebben a G-ben v_n a $v_p, \ldots, v_{n-1}$ pontok mindegyikével szomszédos.

Tegyük fel, hogy v_n nem szomszédos v_k-val valamely $p \leq k \leq n-1$-re. Ekkor v_n szomszédos kell legyen valamely v_i-vel, ahol $1 \leq i \leq p-1$, hiszen v_n foka $n-p$. Mivel $i \leq p-1$ és $k \geq p$, $d_i \leq d_k$, így van olyan v_m pont $(m \neq i, k)$, amely v_k-val szomszédos, de v_i-vel nem. Ha most megnézzük, hogy a $\{v_i, v_k, v_m, v_n\}$ pontok közül milyen élekről tudjuk, hogy szerepelnek-e a G-ben, akkor azt kapjuk, hogy $\{v_i, v_n\}$ él, $\{v_k, v_n\}$ nem, $\{v_i, v_m\}$ nem, $\{v_k, v_m\}$ él. Ha most a G-ből elhagyjuk a $\{v_k, v_m\}$ és $\{v_i, v_n\}$ éleket és helyettük behúzzuk a $\{v_i, v_m\}$ és $\{v_k, v_n\}$ éleket, akkor olyan G^* gráfot kapunk, amelyben a fokszámok ugyanazok, mint G-ben. Ez a G^* viszont G-nél több $\{v_k, v_n\}$ típusú élt tartalmaz ($p \leq k \leq n-1$-re), ami ellentmondás.

Tehát van olyan $d_1, d_2, \ldots, d_n$ fokszámokkal rendelkező gráf, amelyben v_n a v_p, ..., v_{n-1} pontok mindegyikével szomszédos. Ebből a gráfból elhagyva v_n-et olyan gráfot kapunk, amelyben a fokszámok $d'_1, d'_2, \ldots, d'_n$. ∎

A bizonyításból nagyon egyszerű eljárást lehet kiolvasni a $d_1, d_2, \ldots, d_n$ fokszám-sorozat realizálására egyszerű gráffal (Hakimi-algoritmus):

A legnagyobb fokú pontot kössük össze az utána következő legnagyobb fokú pontokkal. Töröljük a legnagyobb fokú pontot, csökkentsük eggyel a vele összekötött pontok fokszámát. Ezt az eljárást ismételve felrajzolhatunk egy $d_1, d_2, \ldots, d_n$ fokszámokkal rendelkező gráfot. (Menet közben a csúcsok sorrendje változhat!) Akkor akadunk el, ha valamelyik csúcs foka nagyobb, mint ahány tőle különböző csúcs van. Ilyenkor az eredeti fokszám-sorozat nem realizálható egyszerű gráffal. Természetesen lehet, hogy a fenti eljárással kapott gráffal nem izomorf gráffal is lehet realizálni az adott fokszám-sorozatot. Ha tehát azt sejtjük, hogy az adott fokszámsorozat realizálható, akkor a Hakimi-algoritmus megad egy olyan egyszerű gráfot, amelyben a fokszámok éppen az előírtak.

A feladatok közül az 1. lényegében azt mondja, hogy a fentebb látott, a kis és nagy fokú pontok között menő élek kétféle összeszámlálásán alapuló eljárás lényegében szükséges és elégséges feltételt ad, kis pontosítással. (Hogy pontosításra szükség van azt pl. a 4,2,2,2,0 sorozat mutatja.)

Érdemes azt is meggondolni, hogy mit ad a Hakimi-algoritmus az első két állításnak megfelelő esetre.

Szorgalmi feladatok 1. Akkor és csak akkor létezik egyszerű gráf a $(0) \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ fokszámokkal, ha

(1) $d_1 + \ldots + d_n$ páros és

(2) $\sum_{i=n-k+1}^{n} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=1}^{n-k} \min(d_i, k)$

minden $1 \leq k \leq n$ esetén.

Beadható (szorgalmi) feladatok 2*. Keressünk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy a $(0) \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ egészek egyszerű *összefüggő gráf* fokszámai legyenek.