

1. Adott egy $D = (V, A)$ digráf és egy $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ költségfüggvény. Legyen tetszőleges $v \in V$ -re $\pi(v)$ a v -ben végződő séták minimális költsége (a séta egy élen többször is áthaladhat). Mikor értelmes ez a definíció? Bizonyítsuk be, hogy ha értelmes, akkor minden $uv \in A$ élre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$, azaz π *megengedett potenciál*.
2. Adott egy $D = (V, A)$ digráf, egy $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ konzervatív költségfüggvény (azaz nincs negatív irányított kör) és π_1, π_2 megengedett potenciálok. Igazold, hogy
 - (a) $\pi_1 + 5$ is megengedett potenciál,
 - (b) $\frac{\pi_1 + \pi_2}{2}$ is megengedett potenciál, sőt $3\pi_1/7 + 4\pi_2/7$ is az.
 - (c) $\min(\pi_1, \pi_2)$ is megengedett potenciál. Mi a helyzet, ha min helyett max-ot írunk?
 - (d) $\lfloor \pi_1 \rfloor$ is megengedett potenciál, ha c egészértékű. Igaz ez felső egészrészszel is?
3. Igazold, hogy konzervatív költségfüggvény esetén ha egy s -ből t -be vezető P út minden éle benne van legolcsóbb $s - t$ útban, akkor P maga is legolcsóbb $s - t$ út. Igaz-e ez nem konzervatív költségfüggvény esetén?
4. Legyen $D = (V, A)$ aciklikus digráf, $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ egy költségfüggvény, és s egy olyan csúcs, amiből minden más csúcs elérhető. Mutasd meg, hogy azok között a megengedett potenciálok között, amikre $\pi(s) = 0$, van olyan, ahol minden más csúcsra $\pi(v)$ a lehető legnagyobb. Mi köze van ennek a PERT módszerhez?
5. Igazold, hogy egy $nm + 1$ különböző tagból álló számsorozatnak vagy van $n + 1$ tagú monoton növekvő részsorozata, vagy van $m + 1$ tagból álló monoton fogyó részsorozata. Létezhet-e mindkét fajta részsorozat?
6. **Beadandó:** Készítsünk hagymás rántottát! A megpucolt és felvágott hagymát forró olajban megpároljuk, hozzáadjuk a felvert tojást, megsütjük. Kenyérrel és pirospaprikával tálaljuk. Az egyes műveletek (időigényeik): hagymapucolás (2 perc), a hagyma felvágása (4), olaj felmelegítése (2), hagyma párolása (2), tojások feltörése (1), tojás felverése (2), tojás sütése (7), kenyérszeletelés (2), terítés (2), paprika megkeresése (2). Minimálisan mennyi idő alatt készíthető el a rántotta? Adjuk meg az optimális ütemezést, és az optimalitást igazoló *kritikus utat* is. (A rántotta készítéséhez van több emberünk is, akik tudnak párhuzamosan dolgozni!)

1. Adott egy $D = (V, A)$ digráf és egy $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ költségfüggvény. Legyen tetszőleges $v \in V$ -re $\pi(v)$ a v -ben végződő séták minimális költsége (a séta egy élen többször is áthaladhat). Mikor értelmes ez a definíció? Bizonyítsuk be, hogy ha értelmes, akkor minden $uv \in A$ élre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$, azaz π *megengedett potenciál*.
2. Adott egy $D = (V, A)$ digráf, egy $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ konzervatív költségfüggvény (azaz nincs negatív irányított kör) és π_1, π_2 megengedett potenciálok. Igazold, hogy
 - (a) $\pi_1 + 5$ is megengedett potenciál,
 - (b) $\frac{\pi_1 + \pi_2}{2}$ is megengedett potenciál, sőt $3\pi_1/7 + 4\pi_2/7$ is az.
 - (c) $\min(\pi_1, \pi_2)$ is megengedett potenciál. Mi a helyzet, ha min helyett max-ot írunk?
 - (d) $\lfloor \pi_1 \rfloor$ is megengedett potenciál, ha c egészértékű. Igaz ez felső egészrészszel is?
3. Igazold, hogy konzervatív költségfüggvény esetén ha egy s -ből t -be vezető P út minden éle benne van legolcsóbb $s - t$ útban, akkor P maga is legolcsóbb $s - t$ út. Igaz-e ez nem konzervatív költségfüggvény esetén?
4. Legyen $D = (V, A)$ aciklikus digráf, $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ egy költségfüggvény, és s egy olyan csúcs, amiből minden más csúcs elérhető. Mutasd meg, hogy azok között a megengedett potenciálok között, amikre $\pi(s) = 0$, van olyan, ahol minden más csúcsra $\pi(v)$ a lehető legnagyobb. Mi köze van ennek a PERT módszerhez?
5. Igazold, hogy egy $nm + 1$ különböző tagból álló számsorozatnak vagy van $n + 1$ tagú monoton növekvő részsorozata, vagy van $m + 1$ tagból álló monoton fogyó részsorozata. Létezik-e mindkét fajta részsorozat?
6. **Beadandó:** Készítsünk hagymás rántottát! A megpucolt és felvágott hagymát forró olajban megpároljuk, hozzáadjuk a felvert tojást, megsütjük. Kenyérrel és pirospaprikával tálaljuk. Az egyes műveletek (időigényeik): hagymapucolás (2 perc), a hagyma felvágása (4), olaj felmelegítése (2), hagyma párolása (2), tojások feltörése (1), tojás felverése (2), tojás sütése (7), kenyérszeletelés (2), terítés (2), paprika megkeresése (2). Minimálisan mennyi idő alatt készíthető el a rántotta? Adjuk meg az optimális ütemezést, és az optimalitást igazoló *kritikus utat* is. (A rántotta készítéséhez van több emberünk is, akik tudnak párhuzamosan dolgozni!)