Operációkutatás I, extra beadható feladatok 2011. december 22.

1. Legyen $C = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\}$. Állítsuk elő C-t metszetkúpként és generált kúpként!

2. Legyen $A_1 \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{j\times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^k$, $b_2 \in \mathbb{R}^l$, $b_3 \in \mathbb{R}^j$, a, $b_4 \in \mathbb{R}^n$! Írjuk fel a Farkas-lemmát az alábbi rendszerre!
$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n : A_1x_1 \leq b_1, A_2x_2 \leq b_2, A_3x_3 \geq b_3, x_1 + x_2 + x_3 = b_4, a^Tx_2 = \sqrt{17}, x_1 \geq 0.$$

3. Legyen $G = (V, E)$ gráf. Bizonyítsuk be, hogy
$$\exists x : V \to \mathbb{R}_0^+, \text{ amelyre } \sum_{u\in N(v)} x(u) = 1 \text{ minden } v \in V \text{ esetén}$$
akkor és csak akkor, ha
$$\nexists y : V \to \mathbb{R}, \text{ amelyre } \sum_{u\in N(v)} y(u) \geq 0 \text{ minden } v \in V \text{ esetén és} \sum_{v\in V} y(v) < 0.$$
(Egy $v \in V$ csúcs esetén $N(v)$-vel jelöljük v szomszédainak halmazát.)

4. Fourier-Motzkin eliminációval írjuk fel az $\{x \in \mathbb{R}^3 : Qx \leq b\}$ poliéder x_1 tengely menti vetületét, ha
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$