

A beadandó feladat megoldását \LaTeX szövegszerkesztővel kell elkészíteni, és a következő gyakorlaton kell beadni, vagy kinyomtatva, vagy pdf-ben elküldve. További információk a http://www.cs.elte.hu/~tkiraly/students/opkut1_2011.html oldalon találhatóak.

1. Igazold, hogy egy $nm + 1$ különböző tagból álló számsorozatnak vagy van $n + 1$ tagú monoton növekvő részsorozata, vagy van $m + 1$ tagból álló monoton fogyó részsorozata. Létezhet-e mindkét fajta részsorozat?
2. Adott egy $D = (V, A)$ digráf és egy $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ költségfüggvény. Legyen tetszőleges $v \in V$ -re $\pi(v)$ a v -ben végződő séták minimális költsége (a séta egy élen többször is áthaladhat, és 0 hosszú is lehet). Mikor értelmes ez a definíció? Bizonyítsuk be, hogy ha értelmes, akkor minden $uv \in A$ élre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$, azaz π **megengedett potenciál**.
3. Mutasd meg, hogy a fenti megengedett potenciál a nem-pozitív megengedett potenciálok között a lehető legnagyobb.
4. Adott egy $D = (V, A)$ digráf és egy $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ költségfüggvény, legyen $n = |V|$. Jelölje $v \in V$ -re $\pi_j(v)$ a v -ben végződő, legfeljebb j élű séták minimális költségét. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor létezik negatív költségű kör, ha létezik $v \in V$, amire $\pi_n(v) < \pi_{n-1}(v)$.
5. Adott egy $D = (V, A)$ digráf, egy $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ **konzervatív költségfüggvény** (azaz nincs negatív össz-súlyú irányított kör) és π_1, π_2 megengedett potenciálok. Igazold, hogy
 - (a) $3\pi_1/7 + 4\pi_2/7$ megengedett potenciál.
 - (b) $\min(\pi_1, \pi_2)$ is megengedett potenciál. Mi a helyzet, ha min helyett max-ot írunk?
6. Igazold, hogy konzervatív költségfüggvény esetén ha egy s -ből t -be vezető P út minden éle benne van legolcsóbb $s - t$ útban, akkor P maga is legolcsóbb $s - t$ út. Igaz-e ez nem konzervatív költségfüggvény esetén?
7. **Beadandó.** Mutasd meg, hogy ha egy élköltséges digráf minden csúcsába vezet negatív költségű séta, akkor a költségfüggvény nem lehet konzervatív.

A beadandó feladat megoldását \LaTeX szövegszerkesztővel kell elkészíteni, és a következő gyakorlaton kell beadni, vagy kinyomtatva, vagy pdf-ben elküldve. További információk a http://www.cs.elte.hu/~tkiraly/students/opkut1_2011.html oldalon találhatóak.

1. Igazold, hogy egy $nm + 1$ különböző tagból álló számsorozatnak vagy van $n + 1$ tagú monoton növekvő részsorozata, vagy van $m + 1$ tagból álló monoton fogyó részsorozata. Létezhet-e mindkét fajta részsorozat?
2. Adott egy $D = (V, A)$ digráf és egy $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ költségfüggvény. Legyen tetszőleges $v \in V$ -re $\pi(v)$ a v -ben végződő séták minimális költsége (a séta egy élen többször is áthaladhat, és 0 hosszú is lehet). Mikor értelmes ez a definíció? Bizonyítsuk be, hogy ha értelmes, akkor minden $uv \in A$ élre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$, azaz π **megengedett potenciál**.
3. Mutasd meg, hogy a fenti megengedett potenciál a nem-pozitív megengedett potenciálok között a lehető legnagyobb.
4. Adott egy $D = (V, A)$ digráf és egy $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ költségfüggvény, legyen $n = |V|$. Jelölje $v \in V$ -re $\pi_j(v)$ a v -ben végződő, legfeljebb j élű séták minimális költségét. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor létezik negatív költségű kör, ha létezik $v \in V$, amire $\pi_n(v) < \pi_{n-1}(v)$.
5. Adott egy $D = (V, A)$ digráf, egy $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ **konzervatív költségfüggvény** (azaz nincs negatív össz-súlyú irányított kör) és π_1, π_2 megengedett potenciálok. Igazold, hogy
 - (a) $3\pi_1/7 + 4\pi_2/7$ megengedett potenciál.
 - (b) $\min(\pi_1, \pi_2)$ is megengedett potenciál. Mi a helyzet, ha min helyett max-ot írunk?
6. Igazold, hogy konzervatív költségfüggvény esetén ha egy s -ből t -be vezető P út minden éle benne van legolcsóbb $s - t$ útban, akkor P maga is legolcsóbb $s - t$ út. Igaz-e ez nem konzervatív költségfüggvény esetén?
7. **Beadandó.** Mutasd meg, hogy ha egy élköltséges digráf minden csúcsába vezet negatív költségű séta, akkor a költségfüggvény nem lehet konzervatív.