

## Képletgyűjtemény az 1. ZHra

Szita formula:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k, \text{ ahol } S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Feltételes valószínűség:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

$B_1, \dots, B_n$  TER:

$$\text{Teljes valószínűség tétele: } P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

$$\text{Bayes tétele: } P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)}.$$

$A_1, \dots, A_n$  események függetlenek, ha  $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  választásra

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}).$$

Az  $X$  diszkrét valószínűségi változó eloszlása az  $(x_i, p_i)_{i=1, \dots}$  párok sorozata, ahol  $x_i$ -k az  $X$  lehetséges értékei, és  $p_i = P(X = x_i)$ .

Nevezetes diszkrét eloszlások:

$$\text{Binomiális: } p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

$$\text{Hipergeometriai: } p_k = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, \dots, n.$$

$$\text{Geometriai: } p_k = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{Negatív binomiális: } p_k = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, \dots$$

$$\text{Poisson: } p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény (abszolút folytonos eset):

$$P(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Nevezetes abszolút folytonos eloszlások:

$$\text{Egyenletes: } f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.$$

$$\text{Exponenciális: } f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

$$\text{Standard normális: } \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Örökifjú tulajdonság:

$$P(X > x+z | X > x) = P(X > z) \quad \forall x, z > 0.$$

Képletgyűjtemény a 2. ZHra

Várható érték: diszkrét eset:

$$E(X) = \sum_i x_i p_i, \quad E(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i.$$

abszolút folytonos eset:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx.$$

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c; \text{ ha } X \text{ és } Y \text{ függetlenek: } E(XY) = E(X)E(Y).$$

Szórásnégyzet:

$$D^2(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E^2(X).$$

$$D(aX + b) = |a|D(X); \text{ ha } X \text{ és } Y \text{ függetlenek: } D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y).$$

Kovariancia:

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

$$\text{cov}(X, Y + Z) = \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Z), \quad \text{cov}(aX, Y) = a \cdot \text{cov}(X, Y).$$

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2\text{cov}(X, Y).$$

Korreláció:

$$R(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{D(X)D(Y)}.$$

Nevezetes eloszlások:

eloszlás	várható érték	szórásnégyzet
binomiális	$np$	$np(1-p)$
geometriai	$1/p$	$(1-p)/p^2$
hipergeometriai	$nM/N$	$n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$
negatív binomiális	$r/p$	$r(1-p)/p^2$
Poisson	$\lambda$	$\lambda$
egyenletes	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
exponenciális	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
normális	$m$	$\sigma^2$

Markov egyenlőtlenség:

$$P(X \geq K) \leq \frac{E(X)}{K}, \text{ ha } X \geq 0.$$

Csebisev egyenlőtlenség:

$$P(|X - E(X)| \geq K) \leq \frac{D^2(X)}{K^2}.$$

Centrális határeloszlástétel:

$$\frac{S_n - n \cdot m}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \rightarrow N(0, 1).$$

Tapasztalati eloszlásfüggvény:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i < x).$$

Torzítatlan becslés:  $E_{\vartheta}(T(X)) = \psi(\vartheta)$

Maximum likelihood becslés:

$$L_n(X; \hat{\vartheta}) = \max\{L_n(X; \vartheta) : \vartheta \in \Theta\}.$$

Elméleti momentumok:  $\mu_{\ell} = E_{\vartheta}(X_i^{\ell})$ , tapasztalati momentumok:  $\hat{\mu}_{\ell} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{\ell}$

A mintaátlagról:

$$E(\bar{X}) = E(X_1), \quad D^2(\bar{X}) = \frac{D^2(X_1)}{n}.$$