Tudnivalók a
„Valószínűségszámítás és statisztika”
tárgy teljesítéséhez

1. Előadás (IP-eVSZ1E/1)
   - Az órán elhangzottnál bővebb jegyzetek megtalálhatók a honlapomon: www.math.elte.hu/~villo, a „Hallgatóknak” menüpont alatt. Ugyanitt ajánlok további irodalmat.
   - A kurzust írásbeli vizsga zárja, melyben feleletválasztós és kifejtendő kérdések is lesznek. A vizsgán semmilyen segédanyag nem használható!

2. Gyakorlat (IP-eVSZ1G/1)
   - Két ZH lesz, továbbá egy pótlási lehetőség a félév végén. Ekkor már csak egy ZH-t lehet pótolni, javítani, tehát a két ZH közül legalább az egyiket sikeresen meg kell írni félév közben!
   - A ZH-k 30-30 pontosak lesznek, mindkettőn legalább 10 pontot kell teljesíteni. A ZH-n az általam összeállított képletgyűjteményt szabad használni.
   - A gyakorlati jegyet a két ZH összpontszáma alapján adom, 20 ponttól elégséges, 50 ponttól jeles.
   - Az első ZH időpontja: október 20, 20:15-21:00, a második ZH időpontja: december 8, 20:15-21:00. A pótZH időpontja: december 15, 20:15-21:00.

Valószínűségszámítás feladatok 1.

1. Feldobunk egyszerre két 20Ft-os és egy 10Ft-os érmét. Adjuk meg a kísérlethez tartozó valószínűségi mezőt!
2. Egy kockával 10-szer dobunk. Ábrázoljuk a következő három eseményt halmazokkal!
   A: Legalább ötször páros számot dobunk.
   B: Legalább négyszer hatost dobunk.
   C: Legalább hétszer kettest dobunk.
   Fogalmazzuk meg a $B \setminus A$ eseményt szavakkal!
3. Egy kockával dobva hány dobás esetén előnyös arra fogadni, hogy lesz legalább egy hatos? Mi a helyzet két kocka esetén a dupla hatossal?
4. Egy szabályos kockát 10-szer feldobtunk. Mennyi a valószínűsége, hogy van olyan szám, amit pontosan egyszer dobtunk?
5. Egy dobozban négy különböző pár, azaz összesen nyolc darab fülbevaló van. Anna, Bea, Cili és Dia találomra vesznek maguknak két-két darabot. Mennyi az esélye, hogy legalább egyiküknek összeillő fülbevalók jutnak?
6. Három urnába véletlenszerűen bedobálunk 7 golyót. Számítsuk ki a Poincaré formulával, hogy mekkora a valószínűsége, hogy marad üres urna.
7. Kockával háromszor dobva, tekintsük a következő két eseményt:
   A: a dobások összege legfeljebb 7, B: mindhárom dobás különböző.
   Számítsuk ki a $P(A|B)$ valószínűséget!
8. Két urna közül az elsőben 40 fehér és 20 piros, a másodikban pedig 20 fehér és 20 piros golyó van. Péter feldob 2 szabályos érmét. Ha mindkét dobás fej, akkor az első urnából húz egy golyót, egyébként a másodikból. Mekkora az esélye, hogy Péter piros golyót húz?
9. Egy csomag szaloncukorban 20 darab van. Attila három csomagot vett: egy zseléset, egy marcipánost, és egy vegyeset (ebben zselés és marcipános szaloncukor van fele-fele arányban). Sajnos a zacskókon elmosódott a felirat. Attila véletlenszerűen kiválasztotta az egyiket, és megevett belőle 4 darabot. Mind a négy zselés volt. Ezek után mennyi a (feltételes) valószínűsége annak, hogy Attila a vegyes csomagból lakmározott?
10. $P(A \mid B) = 0.7$, $P(A \mid \overline{B}) = 0.3$, $P(B \mid A) = 0.6$. $P(A) = ?$
11. Péternek 30, Tamásnak 10 forintja van. Ha egy érme feldobásánál fej jön ki, akkor Péter nyer 1 forintot Tamástól, különben fordítva. A játékot addig folytatják, amíg valamelyikőjüknek elfogy a pénze. Mennyi a valószínűsége, hogy Péter veszti el összes pénzét?
12. Két kockával dobunk. Tekintsük a következő két eseményt: A: a dobások összege páros, B: a két dobás összege legfeljebb 5. Független-e A és B?
13. Egy érmét 3-szor (n-szer) feldobva, tekintsük az alábbi eseményeket: A: van fej és írás is;
    B: legfeljebb egy írás van. Függetlenek-e?

14. Találomra választunk egy számot 1-től 8-ig. Vizsgáljuk a következő három esemény függetlenségét!
    A: a szám páros, B: a szám ötnél kisebb, C: a szám vagy kettő, vagy ötnél nagyobb.
15. Egy fiókban 10 különböző pár kesztyű van. Találomra kiveszünk 4 darabot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzottak között k pár lesz ($k = 0,1,2$)?
16. Öt kockával dobva adjuk meg a hatosok számának eloszlását!
17. Mekkora az esélye, hogy a legnagyobb és legkisebb lottószám különbsége éppen k? Melyik k a legvalószínűbb?
18. Hány dobókocka esetén a legnagyobb a valószínűsége, hogy a kockákat egyszerre feldobva, a kapott számok között pontosan egy hatos lesz?
19. Egy sportlövő 1/7 valószínűséggel talál el egy léggömböt. Az ötödik találatig lő. Adjuk meg a lövések számának eloszlását!
20. Egy kockát n-szer feldobunk. Adjuk meg a legnagyobb dobott érték eloszlását.
21. Kockával addig dobunk amíg valamelyik korábban dobott szám előfordul. Határozzuk meg a dobások számának eloszlását! Melyik a legvalószínűbb érték?
22. Egy könyvben átlagosan 16 hiba van (és a hibák száma Poisson eloszlású). Hány hiba van legnagyobb valószínűséggel a könyvben? Mekkora az esélye, hogy a hibák száma 13 és 19 közé esik?
23. Jelölje X, hogy hányadik héten lesz a lottón először legalább két találatunk. Mennyi az esélye, hogy X nagyobb, mint 3? Ha tudjuk, hogy X nagyobb, mint 3, mennyi az esélye, hogy 6-nál is nagyobb?
24. A főnököt egy adott napon telefonon keresők száma Poisson eloszlású, paramétere 10. A titkárnő minden hívást a többitől függetlenül 0,8 valószínűséggel kapcsol be. Milyen eloszlású a bekapcsolt hívások száma? Mekkora az esélye, hogy a főnökhöz páros sok hívás érkezik?
25. Egy kockával az első hatosig dobálunk. Mekkora az esélye, hogy páros sokszor kell dobni? Melyik dobásszám a legvalószínűbb?

Valószínűségszámítás feladatok 2.

1. Egy stopposnak X órát kell várnia, amíg egy autó felveszi. Tegyük fel, hogy X exponenciális eloszlású $\lambda = 1/3$ paraméterrel. Mekkora a valószínűsége, hogy a stopposnak legalább 3, de legfeljebb 6 órát kell várnia, amíg felveszik?
2. Jelölje X azt, hogy három kockadobásból hány hatost kapunk. Rajzoljuk fel X eloszlásfüggvényét!
3. Legyen X egyenletes eloszlású a $[-1, 2]$ intervallumon. Adjuk meg $|X|$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét.
4. Legyen X exponenciális eloszlású, 1 paraméterrel. Milyen eloszlású lesz $Y = e^{-X}$?
5. Legyen az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó egyenletes eloszlású a $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ csúcsokkal megadott négyzet alakú tartományon. Adjuk meg X eloszlását! Független-e X és Y?
6. Egy ember villamossal és busszal jár egyetemre. A villamosra való X várakozási idő (percben) a $[0,5]$ intervallumon, a buszra való Y pedig ettől független, és a $[0,10]$ intervallumon egyenletes eloszlású. A teljes várakozási időnek mi lesz az eloszlása és a várható értéke?
7. Jelölje X egy szabályos kockadobás eredményét, Y pedig azt, hogy két érmedobásból hány fej volt. (X és Y függetlenek.) Határozzuk meg $X+Y$ eloszlását!
8. Egy urnában 3 piros, 2 fehér, és 1 zöld golyó van. Egyenként kihúzzuk a golyókat, jelölje X, hogy hányadikra húzzuk az első pirosat. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!
9. Mennyi a lottón kihúzott számok számtani közepének várható értéke?
10. Egy szabálytalan érmével addig dobunk, míg fejet nem kapunk. Ez átlagosan negyedikre következik be. Határozzuk meg a dobások számának szórásnégyzetét!
11. Egy 1 m sugarú céltáblára lövünk, tegyük fel, hogy a becsapódás pontja egyenletes eloszlású a körben. Jelölje X, hogy a lövés milyen messze van a céltábla középpontjától. Adjuk meg X várható értékét és szórását!
12. Határozzuk meg e^X várható értékét, ha X standard normális eloszlású!
13. Egy urnában három cédula van, egy piros, egy kék, és egy sárga. Visszatevés nélkül egymás után kihúzzuk őket. Jelölje X azt, hogy hányadiknak húztuk a pirosat, Y pedig azt, hogy hányadiknak húztuk a kéket. Számoljuk ki X és Y korrelációs együtthatóját!
14. Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél 0,4. Becsüljük Markov-, illetve Csebisev-egyenlőtlenséggel annak valószínűségét, hogy legalább 100 lövés célba talál! Milyen közelítést kapunk a centrális határeloszlás-tételből?
15. A véletlenszám-táblázatból (amelyben 0-tól 9-ig szerepelnek számjegyek) tíz darab hárommal osztható számot kell kigyűjtenünk.
    a) Várhatóan hány számot kell végignéznünk?
    b) Becsüljük annak a valószínűségét Markov-, illetve Csebisev-egyenlőtlenséggel, hogy legalább 50 számot kell végignéznünk!

Minta ZH

1. a) Mekkora az esélye, hogy egy héten a kihúzott lottószámok mindegyike más maradékot ad öttel osztva?
   b) Mekkora az esélye, hogy mindegyik kihúzott lottószám más maradékot ad öttel osztva, feltéve, hogy összegük legfeljebb 17?
2. Egy urnában 3 szabályos és 1 hamis érme van. A hamis érmén a fej valószínűsége ¾. Találomra kihúztunk egy érmét az urnából, és ötször feldobtuk. Az öt dobásból négy volt fej. Ezek után mennyi a valószínűsége, hogy a hamis érme van a kezünkben?
3. Gergő az iskolában minden nap 60% eséllyel kap piros pontot. Három piros pont után jár egy matrica. Jelölje X, hogy hányadik napon kapja meg a matricát. Adjuk meg X eloszlását, és legvalószínűbb értékét!
4. Egy szabályos kockát 10-szer feldobtunk. Mennyi a valószínűsége, hogy dobtunk 4-est, 5-öst, és 6-ost is?
5. Egy urnában 3 piros, 3 fehér, 3 zöld golyó van. Három gyerek véletlenszerűen kiosztja őket egymás között, mindenki 3 golyót kap. Mekkora a valószínűsége, hogy lesz olyan gyerek, aki csupa egyszínű golyót kap?
6. Legyen A, B és C három esemény, melyekre $P(A) = P(B) = 0{,}4$, $P(A \mid C) = 0{,}2$.
   a) Alkothat-e A, B és C teljes eseményrendszert?
   b) Lehet-e A, B és C független?
7. Milyen k-ra független a következő – egy adott heti ötöslottóhúzással kapcsolatos – két esemény:
   A: a kihúzott számok között szerepel az 1-es
   B: a legnagyobb kihúzott szám a k ?
8. Egy urnában 2 fehér és 5 piros golyó van. Háromszor kell húznunk, és akkor kapjuk meg a főnyereményt, ha pontosan egyszer húzunk fehéret. Visszatevéssel, vagy visszatevés nélkül érdemes húzni?
9. A zsenik társasága IQ-tesztet irat az emberekkel. Annak az esélye, hogy egy zseninek sikerül a teszt, 95%. Annak az esélye, hogy egy közönséges embernek sikerül a teszt, 3%.
   a) Mennyi az esélye, hogy egy véletlenszerűen választott embert felvesznek a társaságba, ha a népesség 2%-a zseni?
   b) Mennyi az esélye, hogy egy sikeres jelentkező tényleg zseni?
10. A hivatalban egy-egy ügy elintézésének ideje (percben mérve) exponenciális eloszlású. Tudjuk, hogy az ügyek 10 százaléka vesz igénybe 20 percnél hosszabb időt. Mennyi az eloszlás paramétere?
11. Legyen X standard normális eloszlású. Mennyi X^2 sűrűségfüggvényének értéke az $x = 4$ helyen?

Eredmények: 1a) 4,3% 1b) 25% 2) 45,8% 3) Negbin(3, 0,6), 4. nap a legvalószínűbb 4) 56,7%

5) 8,6% 6a) nem 6b) nem 7) $k = 73$ 8) visszatevés nélkül 9a) 4,84% 9b) 39,26% 10) 0,115
11) 0,027

Statisztika feladatok – 1.

1. Egy ellenállást 12-szer megmérünk. A mérési hiba minden alkalommal, egymástól függetlenül, standard normális eloszlású. Adjuk meg a következő két valószínűségi változó eloszlását: X: a mérések összege, Y: a mérések átlaga! Melyik adat adja meg pontosabban az ellenállás valódi értékét, az első mérés, vagy a 12 mérés átlaga?

2. Péter n-szer dob kosárra. Minden dobása, egymástól függetlenül, p valószínűséggel talál be. Jelölje X, hogy a dobások hányad része talált be. Adjuk meg X eloszlását, várható értékét és szórását!
a) Tegyük fel, hogy $p = ¼$. Közelítőleg mekkora az esélye, hogy Péter 400 dobásból legalább 160-szor betalál?
b) 400 dobásból Péter 200-szor betalált. Hihető-e, hogy $p = ¼$?

3. Egy (esetleg cinkelt) dobókockán 10000 dobásból 1300-szor lett az eredmény hatos.
a) Mire tippelnénk, mekkora a kockán a hatos dobás valószínűsége?
b) Mondanánk-e az eredmény alapján, hogy a kocka nem szabályos?

4. Legyen $X_1, ..., X_n$ független, azonos, az (0, 1) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata.
a) Adjuk meg az $X_1^{(n)} = \min(X_1, ..., X_n)$, illetve az $X_n^{(n)} = \max(X_1, ..., X_n)$ valószínűségi változók eloszlás- és sűrűségfüggvényét!
b) Hova tartanak ezek a valószínűségi változók (eloszlásban illetve sztochasztikusan)? Mennyi a várható értékük?
c) Adjuk meg, hogy közelítőleg mekkora az esélye, hogy $X_1^{(n)}$ nagyobb, mint $2/n$!

5. Az alábbi számok Budapest évi középhőmérsékletét mutatják 1981-től 2000-ig. Számítsuk ki a mintaátlagot és a tapasztalati szórást!

11.4	11.5	12.1	11.0	10.4	11.1	10.7	11.3	11.8	11.9
10.8	12.2	11.3	12.5	11.4	10.6	11.4	11.8	11.6	12.7

6. Dobjunk fel 6-szor egy kockát. Határozzuk meg a következő alapstatisztikákat: mintaterjedelem, mintaátlag, tapasztalati szórás, tapasztalati medián, rendezett minta. Rajzoljuk fel a tapasztalati és az elméleti eloszlásfüggvényt! Határozzuk meg a $\sup \left|\hat{F}_n(x) - F(x)\right|$ statisztika értékét!

7. Legyen $X_1, ..., X_n$ független, azonos, a $(0, a)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, ahol a-t nem ismerjük. Adjunk becslést az a paraméterre
a) a mintaátlag, *b)* a maximum, *c)* a minimum függvényében. Melyik becslést tartjuk a legjobbnak, és miért? Számítsuk ki a becsléseket a lenti táblázat alapján generált mintákon is!

8. Mutassuk meg, hogy egy független, azonos eloszlású mintából számolt tapasztalati szórásnégyzet nem torzítatlan becslés a mintaelemek elméleti szórásnégyzetre! Hogyan tehetjük torzítatlanná a becslést?

9. Tegyük fel, hogy a paraméterű exponenciális eloszlásból van n elemű mintánk. Adjunk torzítatlan becslést $1/a$-ra és $\exp(-3a)$-ra!

10. Legyen $X_1, ..., X_8$ a Bin(4, p), $Y_1, ..., Y_{10}$ pedig a Bin(6, p) eloszlásból származó független minta, ahol p ismeretlen paraméter.

a) Milyen a és b értékekre lesz $a\overline{X} + b\overline{Y}$ torzítatlan becslése p-nek?

b) Milyen a és b választással kapjuk meg a legkisebb szórású becslést (a torzítatlanok között)?

11. Mutassuk meg, hogy exponenciális eloszlású minta esetén $n \cdot \min(X_1, ..., X_n)$ torzítatlan, de nem konzisztens becslés a várható értékre.

12. Legyen $X_1, ..., X_n$ független, az alábbi sűrűségfüggvényű eloszlásból származó minta: $f_a(x) = 2x/a^2$, ha $0 < x < a$, és 0 különben. ($a > 0$ tetszőleges)

a) Adjunk elégséges statisztikát az ismeretlen a paraméterre!

b) Konstruáljunk torzítatlan becslést a-ra a mintaátlag és a maximális mintaelem segítségével is.

c) Mutassuk meg, hogy mindkét becslés konzisztens.

d) Melyik a hatásosabb?

13. Határozzuk meg az ismeretlen paraméter ML becslését és MM becslését, ha az n elemű minta a) geometriai b) E(a, b) c) E(a, 2a) d) exponenciális e) normális eloszlású!

14. A genetikusok szerint egy növényfajban egy bizonyos tulajdonság az alábbi eloszlásban fordul elő: P(AA) = p^2, P(AB) = 2p(1-p), P(BB) = $(1 - p)^2$. Tegyük fel, hogy egy adott területen a három fajta gyakoriság rendre N_{AA}, N_{AB}, illetve N_{BB}. Adjunk ML becslést p-re!
Számítsuk ki a becslést a következő konkrét mintára:
$N_{AA} = 320$, $N_{AB} = 165$, $N_{BB} = 15$.

15. Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ a következő eloszlásból származó minta:
$P(X_1 = k) = 2k \,/\, (3N(N+1))$, ha $N \le k \le 2N$, különben pedig 0.
Itt N ismeretlen, pozitív egész értékű paraméter. Adjunk N-re ML becslést!
Számítsuk ki a becslést a következő konkrét mintára:
91, 73, 60, 77, 71, 91, 56, 97, 92, 67

A (0,1) intervallumon egyenletes eloszlásból vett 100 elemű minta

0.688	0.977	0.389	0.336	0.185	0.133	0.844	0.823	0.147	0.716
0.859	0.305	0.118	0.707	0.253	0.469	0.643	0.120	0.360	0.443
0.550	0.953	0.337	0.349	0.181	0.808	0.517	0.981	0.677	0.202
0.479	0.563	0.948	0.755	0.387	0.031	0.268	0.446	0.371	0.960
0.492	0.426	0.882	0.807	0.374	0.138	0.489	0.244	0.936	0.857
0.967	0.048	0.980	0.181	0.522	0.191	0.802	0.908	0.301	0.658
0.486	0.512	0.363	0.741	0.058	0.134	0.490	0.986	0.482	0.826
0.456	0.223	0.482	0.703	0.638	0.765	0.443	0.779	0.127	0.385
0.933	0.706	0.098	0.293	0.278	0.747	0.445	0.538	0.878	0.563
0.850	0.911	0.322	0.736	0.855	0.342	0.371	0.722	0.216	0.760

Minta ZH

1. Pistinek két email címe van: a Pisti@egy.hu címre X, a Pisti@ket.hu címre pedig Y emailt írnak naponta, ahol X és Y független, 5 illetve 10 paraméterű Poisson eloszlású változók. A Pisti@egy.hu címre érkező leveleket a rendszer automatikusan továbbítja a másik címre is. Határozzuk meg a két címre érkező levelek számának (az X és az $X+Y$ változóknak) korrelációs együtthatóját!

2. Legyenek az X_i valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Közös sűrűségfüggvényük

$$f(x) = \begin{cases} c|x|, & \text{ha } x \in [-1/2, 1/2], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg c értékét, és becsüljük meg a $P(X_1 + \ldots + X_{100} \geq 15)$ valószínűséget a Csebisev-egyenlőtlenséggel!

3. Jelölje X, hogy egy év alatt hányan halnak meg lórúgástól Magyarországon. Tegyük fel, hogy X eloszlása Poisson(8). Becsüljük felülről Markov, illetve Csebisev egyenlőtlenséggel a $P(X \geq 20)$ valószínűséget!

4. Egy dobozban 4 cédula van, rajtuk a -1,0,2,2 számok. 192-szer húzunk visszatevéssel a dobozból. A centrális határeloszlás tétel alkalmazásával határozzuk meg közelítőleg annak valószínűségét, hogy a kihúzott számok összege legalább 108, de 162-nél kisebb.

5. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a következő eloszlásból származó minta:
   $P(X_i = 1) = c$, $P(X_i = 2) = 3c$, $P(X_i = 3) = 1 - 4c$ ($0 < c < ¼$ ismeretlen paraméter).
   a) Határozzuk meg c maximum likelihood becslését!
   b) Határozzuk meg c momentum módszeres becslését!
   Számítsuk ki a becsléseket egy olyan 100 elemű mintára, melyben 12 darab 1-es, 39 darab 2-es, és 49 darab 3-as van.

6. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ egy n elemű független minta a következő sűrűségfüggvényű eloszlásból:

$$f(x) = \lambda e^{-2\lambda|x|}, \quad x \in R,$$

   ahol λ ismeretlen pozitív paraméter. Adjunk maximum likelihood becslést λ–ra!

7. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ az $N(m, 2)$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2n}$ pedig az $N(m, 5)$ eloszlásból származó független minta (a második paraméter a szórást jelöli).
   a) Milyen a és b értékekre lesz $a\overline{X} + b\overline{Y}$ torzítatlan becslése m-nek?
   b) Milyen a és b választással kapjuk meg a legkisebb szórású becslést (a torzítatlanok között)?

8. Legyen X_1, X_2 két elemű minta az $N(m, 1)$ eloszlásból. Az m^2 paramétert szeretnénk becsülni.
   a) Torzítatlan-e a $T_1 = X_1X_2$ becslés? Mennyi a szórásnégyzete?
   b) Milyen b-re lesz torzítatlan a $T_2 = ((X_1+ X_2)/2)^2 - b$ becslés?

Eredmények: 1) 0.577 2) $c = 4$, becslés: 1/18 3) Markov: 0.4, Csebisev: 1/18 4) 0.82

5) a) $(N_1 + N_2)/(4n)$, ahol N_1 az egyesek, N_2 a kettesek száma a mintában b) $(3-\overline{X})/5$, a konkrét mintára 0.1275, illetve 0.126 6) $\hat{\lambda} = \dfrac{n}{2\sum|X_i|}$ 7) a) $a + b = 1$ b) $a = 25/33$, $b = 8/33$

8) a) igen, $2m^2 + 1$ b) 0.5