

**Valószínűségszámítás és statisztika vizsgatematika estis programozóknak**  
**2011. december**

1. Valószínűségi mező. Klasszikus valószínűségi mező. Szita-formula, névjegy probléma. Feltételes valószínűség. Teljes eseményrendszer, teljes valószínűség tétele, Bayes tétel. Események függetlensége, páronkénti függetlensége. Akárhány esemény kicserélhető a komplementerére, a függetlenség megmarad.
2. Valószínűségi változó fogalma, diszkrét valószínűségi változó eloszlása. Nevezetes diszkrét eloszlások és modelljük: indikátor, binomiális, hipergeometriai, geometriai, negatív binomiális. Poisson eloszlás. Binomiális eloszlás közelítése Poissonnal.
3. Eloszlásfüggvény, tulajdonságai. Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Abszolút folytonos eloszlás sűrűségfüggvénye. Tulajdonságok, kapcsolat az eloszlásfüggvénnyel. Valószínűségek kiszámítása az eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény segítségével.
4. Egyenletes eloszlás (intervallumon). Exponenciális eloszlás, örökifjú tulajdonság. Standard normális eloszlás.  $\varphi(x)$  és  $\Phi(x)$  szimmetria tulajdonságai. Lineáris transzformált eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye. Normális eloszlás. Vektorváltozó. Együttes eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény. Peremeloszlások eloszlásfüggvényének és sűrűségfüggvényének kiszámítása. Polinomiális eloszlás. Egyenletes eloszlás síkbeli/térbeli tartományon.
5. Valószínűségi változók függetlensége. Konvolúció, kiszámítása diszkrét és abszolút folytonos esetben. Normálisak, Poissonok, binomiálisak, negatív binomiálisak konvolúciója.
6. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke, tulajdonságok. Feltételes várható érték, teljes várható érték tétele. Nevezetes diszkrét eloszlások várható értékének kiszámítása különböző módszerekkel (definíció alapján, összegre bontással, teljes várható érték tételével).
7. Abszolút folytonos valószínűségi változó várható értéke, tulajdonságok. Nevezetes abszolút folytonos eloszlások várható értékének kiszámítása. Szórás és tulajdonságai. Kovariancia és tulajdonságai. Összeg szórásnégyzetének kiszámítása. Nevezetes eloszlások szórásának kiszámítása (definíció alapján, összegre bontással).
8. Korrelációs együttható, mint a lineáris függőség mérőszáma, tulajdonságai. Korrelátlanság és függetlenség kapcsolata. A korrelációs együttható a standardizáltak szorzatának várható értéke.
9. Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség. Sztochasztikus konvergencia. Nagy számok gyenge törvénye független, azonos eloszlású valószínűségi változókra. Eloszlásban való konvergencia fogalma. Centrális határeloszlás-tétel. Példa normális közelítés alkalmazására.
10. Statisztikai mező, minta, statisztika. Néhány gyakran használt statisztika. Tapasztalati eloszlás, tapasztalati eloszlásfüggvény. Glivenko tétele.

11. Becslések és jellemzőik: torzítatlanság, aszimptotikus torzítatlanság, hatásosság. A mintaátlag torzítatlan a várható értékre, és a lineáris (torzítatlan) becslések között hatásos. Konzisztencia. Kritérium konzisztenciára.
12. Tapasztalati becslések. Likelihood függvény. Maximum likelihood becslés, aszimptotikus tulajdonságai. A momentumok módszere. Konfidenciaintervallum. KI a normális eloszlás várható értékére (ismert és ismeretlen szórás esetén).
13. Statisztikai próba, fogalmak: hipotézisek, próbastatisztika, elfogadási és elutasítási tartomány, hibavalószínűségek, terjedelem, erőfüggvény. Próbák tulajdonságai: torzítatlanság, konzisztencia, (egyenletesen leg)erősebb próba. Neyman-Pearson lemma.
14. Normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák:  $u$ -,  $t$ -, és  $F$ -próbák (egymintás és kétmintás esetben). A  $t$ ,  $\chi^2$ , és  $F$  eloszlás származtatása a normális eloszlásból. Fisher-Bartlett tétel.
15. A  $\chi^2$ -próba: diszkrét illeszkedésvizsgálat (becsléses eset is), függetlenségvizsgálat.

A tematikában szereplő tételek közül nem mindegyiknek kell a bizonyítását is tudni. Az elektronikus jegyzetből a következő sorszámú tételek bizonyítását kérhetem:

Valószínűségszámítás: 4.2. Tétel, 4.3. Tétel, 5.1. Tétel, 6.1. Tétel, 6.4. Tétel, 9.2. Tétel, A várható érték tulajdonságai (10.1), A szórásnégyzet tulajdonságai (11.1), 13.4. Tétel.

Statisztika: 3.2. Tétel.

Szerepelhetnek még a fontos példák levezetései, például a nevezetes eloszlásokhoz kapcsolódó eredmények (várható érték, szórás, maximum likelihood becslés, konfidenciaintervallum).

Javaslom az elektronikus jegyzet tanulmányozását, de vigyázat: sajtóhibák biztosan vannak benne!

**A vizsgáról:** Két óra hosszú írásbeli vizsga lesz. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható, üres papír sem kell, mert adok. Indexet feltétlenül hozzanak magukkal!

20 darab feleletválasztós tesztkérdés lesz, a jó válasz 2 pont, rossz válasz -1 pont (ha nem jelölnék meg választ, 0 pont). Lesz még 4 darab kifejtős kérdés, mindegyik 10 pontos (definíciók, tételkimondások, példák, levezetések). Így összesen 80 pont szerezhető.

A vizsgára kapott jegy:

23 pontig elégtelen

24-35 pontig elégséges

36-47 pontig közepes

48-59 pontig jó

60 ponttól jeles.