

VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS ÉS STATISZTIKA MINTAVIZSGA
2011. december

Tesztkérdések. A jó választ kérem bekarikázni! Jó válasz: 2 pont, rossz válasz: -1 pont. Egy kérdésre több jó válasz is lehet!

- Legyenek X és Y független valószínűségi változók véges szórással. Mennyi $D^2(3X - Y)$?
A: $9D^2(X) + D^2(Y)$ **B:** $3D^2(X) + D^2(Y)$ **C:** $9D^2(X) - D^2(Y)$ **D:** nincs általános képlet **E:** Más
- Legyen X exponenciális eloszlású, $\lambda = 3$ paraméterrel. Mennyi lesz $3X - 8$ eloszlásfüggvényének értéke az $x = 1$ helyen?
A: $1 - e^{-6}$ **B:** e^{-15} **C:** $e^{-3} - e^{-9}$ **D:** e^{-9} **E:** $1 - e^{15}$ **F:** e **G:** Más
- Legyen az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye a következő: $f(x, y) = 2$, ha $0 < x < y < 1$, és 0 különben. Melyik állítás(ok) igaz(ak)?
C: $D^2(X + Y) > D^2(X) + D^2(Y)$ **D:** $D^2(X + Y) < D^2(X) + D^2(Y)$ **E:** $D^2(X - Y) < D^2(X) + D^2(Y)$
F: $D^2(X - Y) > D^2(X) + D^2(Y)$
- Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke 2, szórásnégyzete 1. A Csebisev egyenlőtlenség alapján hogyan becsülhetjük a $P(0 < X < 4)$ valószínűséget?
A: $\leq 1/8$ **B:** $\leq 1/4$ **C:** $\leq 1/2$ **D:** $\leq 3/4$ **E:** $\geq 1/8$ **F:** $\geq 1/4$ **G:** $\geq 1/2$ **H:** $\geq 3/4$ **I:** Más
- Legyen X egyenletes eloszlású a $[0, 2]$ intervallumon. Mennyi $D^2(X)$?
A: 0 **B:** $1/3$ **C:** $2/3$ **D:** 1 **E:** $4/3$ **F:** $5/3$ **G:** 2 **H:** Más
- Legyenek X_1, X_2, \dots $\lambda = 1$ paraméterű független Poisson eloszlású változók, és $Y_n = X_1 + \dots + X_n$. Az $Y_n - n$ változót az alábbi mennyiségek közül melyikkel osztva kapunk normális határeloszlást ($n \rightarrow \infty$ esetén)?
A: \sqrt{n} **B:** $\log n$ **C:** n **D:** $n^{3/2}$ **E:** n^2 **F:** Más **G:** Sosem kapunk normális határeloszlást.
- Egy garázsban N fehér és M piros autó van. Ganxta Karcsi n autót véletlenszerűen ellop. X jelöli az ellopott piros autók számát. Milyen eloszlású X ?
A: Hipergeometriai **B:** Binomiális **C:** Geometriai **D:** Poisson **E:** Egyenletes **F:** Más
- Az alábbiak közül melyik eloszlásnak legnagyobb a várható értéke?
A: binomiális($n = 100, p = 0.2$) **B:** normális($m = 10.2, \sigma = 4.9$) **C:** egyenletes a $[-50, 50]$ intervallumon
D: Poisson($\lambda = 10.1$)
- Egy dobozban 6 piros és néhány fekete golyó van. Addig húzunk visszatevéssel a dobozból, amíg fekete golyót nem kapunk. Ehhez átlagosan 3 húzásra van szükség. Hány darab fekete golyó van a dobozban?
A: 1 **B:** 2 **C:** 3 **D:** 4 **E:** 5 **F:** 6 **G:** Nincs megoldás **H:** Más
- Legyen X nemnegatív valószínűségi változó, melynek várható értéke 5. A Markov egyenlőtlenség alapján hogyan becsülhetjük a $P(X \geq 15)$ valószínűséget?
A: $\leq 1/15$ **B:** $\leq 2/3$ **C:** $\leq 1/3$ **D:** $\leq 3/15$ **E:** Sehogyan **F:** Más
- Legyen X véges szórású valószínűségi változó és c valós szám. Hogyan fejezhető ki $D^2(cX)$?
A: $\sqrt{|c|}D^2(X)$ **B:** $|c|D^2(X)$ **C:** $c^2D^2(X)$ **D:** Nincs általános képlet **E:** Más
- Legyen az (X, Y) kétdimenziós vektorváltozó egyenletes eloszlású a $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ csúcsokkal megadott háromszögben. Melyik állítás igaz?
A: X és Y független. **B:** X és Y korrelálatlan de nem független. **C:** X és Y korrelációs együtthatója pozitív.
D: X és Y korrelációs együtthatója negatív.
- Egy virágüzletbe egy óra alatt betérő vásárlók száma Poisson eloszlású. Tudjuk, hogy átlagosan három vevő van egy óra alatt. Mennyi az esélye annak, hogy a boltba egy óra alatt egyetlen vásárló sem tér be?
A: $3/e^3$ **B:** 0 **C:** $1/3$ **D:** $1/27$ **E:** Más
- Laci szülinapjára egy doboz desszertet kapott, melyben 24 darab édesség volt: 10 csokis, és 14 marcipános. Laci először megkínálta a barátait: 6 barátja véletlenszerűen választott egy-egy édességet a dobozból. Várhatóan hány csokis desszert maradt Lacinak?
A: 7 **B:** 7,5 **C:** 8 **D:** 7 vagy 8 **E:** Más

15. Legyen X egy megfigyelés, $H_0 : X \sim E(-3, 3)$, $H_1 : X \sim E(-4, 4)$. A következő próbát végezzük: ha $|X| > 2.5$, akkor elutasítjuk H_0 -t, egyébként elfogadjuk. Mekkora a próba ereje?
A: $1/6$ **B:** $5/6$ **C:** $3/8$ **D:** $5/8$ **E:** Más
16. Legyen X_1, X_2, \dots, X_n a $[-a, 5a]$ intervallumon egyenletes eloszlású minta, ahol $a > 0$ ismeretlen paraméter. Mely becslés(ek) konzisztens(ek) a -ra?
A: $(X_n - X_1)/6$ **B:** $X_1/2$ **C:** $\bar{X}/2$ **D:** Egyik sem
17. Legyen X_1, X_2, \dots, X_n exponenciális eloszlású minta, λ az ismeretlen paraméter. Az alábbiak közül melyik a paraméter maximum likelihood becslése?
A: \bar{X} **B:** $n\bar{X}/(n-1)$ **C:** n/\bar{X} **D:** $1/\bar{X}$ **E:** $(n-1)/(n\bar{X})$ **F:** Más
18. Két független mintánk van normális eloszlásból, az egyik 10, a másik 13 elemű. Az F -próba azt mutatta, hogy a két minta szórása egyenlőnek tekinthető. Ezután azt a nullhipotézist vizsgáljuk, hogy a várható értékek is egyformák. Milyen eloszlású lesz a nullhipotézis mellett a próbastatisztika?
A: t_{23} **B:** t_{21} **C:** $t_{10,13}$ **D:** $t_{9,12}$ **E:** $F_{10,13}$ **F:** $F_{9,12}$ **G:** $N(0, 1)$
19. 100-szor feldobtunk két érmét. 35-ször mindkettő fejet mutatott, 55-ször csak az egyik, 10-szer pedig egyik sem. Azt a nullhipotézist szeretnénk ellenőrizni, hogy egy dobásnál a fejek száma a két érmén $\text{Bin}(2, 1/2)$ eloszlású (azaz az érmék szabályosak). Melyik próbát használhatjuk?
A: u **B:** t **C:** F **D:** khi-négyzet **E:** Más
20. Tekintsük a következő 5 elemű mintát: 0, 3, 4, 6, 10. Mennyi a tapasztalati eloszlásfüggvény értéke az $x = 5$ helyen?
A: 0.2 **B:** 0.4 **C:** 0.6 **D:** 0.8 **E:** 1 **F:** Más

Kifejtendő kérdések, mindegyik 10 pont (külön lapon kérem kidolgozni).

1. Mondja ki és bizonyítsa be a Bayes-tételt!
2. Definiálja a binomiális eloszlást, és számítsa ki a szórásnégyzetét!
3. Definiálja egy abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó várható értékét, és mondja ki a várható érték öt tulajdonságát!
4. Ismertesse az egymintás t -próbát (egy- és kétoldali ellenhipotézissel)!