Tervezett féléves kollégium

Zábrádi Gergely

**Algebrai Számelmélet**

(Matematikus MSc, heti $2+2$ óra)

**1. előadás**

- Bevezetés, miről szól az algebrai számelmélet.
- A kvadratikus reciprocitási tétel bizonyítása Gauß-ciklusokkal.
- Gyűrűbővítések, az egész elemek részgyűrűt alkotnak.
- Galois-elméleti összefoglaló.

**2. előadás**

- Norma, nyom, Hilbert 90-es tétele.
- Egész bázis, diszkrimináns.
- Törtideálok, ezek diszkriminánsa, kapcsolat az indexsszel.
- Számtest egészeinek gyűrűje Dedekind (1-dimenziós, Noether, egészre zárt).
- Dedekind gyűrűben igaz ideálokra a számelmélet alaptétele. Osztálycsoport.

**3. előadás**

- $\mathbb{Z}$-rácsok $\mathbb{R}^n$-ben, fundamentális tartományok, Minkowski rácsponttétele.
- Konjugálás-invariáns bilineáris forma $K_{\mathbb{C}} = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$-n, a konjugálás-invariáns $K_{\mathbb{R}}$ altér mint Minkowski-tér.
- Az $\mathcal{O}_K$ által meghatározott rács, ennek fundamentális tartományának a térfogata. Abszolút norma, az osztályszám végessége. Dirichlet-féle egységtétel (gyakorlaton).

**4. előadás**

- Dedekind gyűrűk bővítései.
- Prímideálok felbontása a nagyobb gyűrűben. Elágazási index, inerciafok, fundamentális egyenlet. Teljesen felbomló, elágazásmentes, illetve, teljesen elágazó prímek.
- Egyszerű gyűrűbővítés esetén kapcsolat a minimálpolinom mod $p$ felbontásával. Galois-bővítés esetén Galois-hatás a $p$ feletti prímeken, tranzitivitás.

**5. előadás**

- Hilbert-féle elágazáselmélet, felbontási részcsoport a Galois-csoportban, egy prím felbontási teste.
- Homomorfizmus a mod $p$ Galois-csoportba, inerciarészcsoport, Frobenius felemelt.

- Körosztási testek, Fermat-sejtés reguláris prímekre (gyakorlaton).

**6. előadás**

- Kommutatív gyűrű prímidieáljánál vett lokalizálás. Diszkrét értékelésgyűrűk, Weierstraß előkészítési tételének analógja.
- Értékelések. Dedekind gyűrű lokalizáltja is Dedekind, sőt, egy Noether-féle integritási tartomány pontosan akkor Dedekind, ha lokálisan DVR.
- Osztálycsoport és a lokalizálás kapcsolata (egzakt sorozat). Egy prím akkor és csak akkor ágazik el, ha osztója a diszkriminánsnak.

**7. előadás**

- Abszolútértékek, approximáció. Arkhimédeszi és nem-arkhimédeszi értékelések, ultrametrika.
- Ostrowski tétele $\mathbb{Q}$ értékeléseiről. Kapcsolat a DVR-ekkel.
- Telítés, a $p$-adikus számok teste. Egész elemek.

**8. előadás**

- Projektív és injektív limesz, egzaktsági tulajdonságok. A $p$-adikus egészek $\mathbb{Z}_p$ gyűrűje, mint inverz limesz.
- Nemüres, kompakt, Hausdorff terek inverz limesze is nemüres, kompakt és Hausdorff.
- Hensel–Lemma.

**9. előadás**

- Multiplikatív (Teichmüller-) reprezentánsok. Értékelések kiterjesztése véges bővítésre, egyértelműség.
- Lokális testek. $p$-adikus log és exp, a multiplikatív csoport leírása.
- Newton-poligonok.

**10. előadás**

- Hensel-féle testek, szelíden elágazó bővítések, magasabb elágazási részcsoportok.

**11. előadás**

- A lokális Kronecker-Weber tétel bizonyítása.

**12. előadás**

- A globális Kronecker-Weber tétel bizonyítása a lokálison keresztül.
- További témák, kitekintés: lokál-globál elv, Galois reprezentációk, geometriai kapcsolatok, Langlands program.

# Habilitációselőadás-vázlatok

Mindhárom előadás a fenti Algebrai Számelmélet című Matematikus MSc tárgy része.

**1. A kvadratikus reciprocitási tétel bizonyítása Gauß-ciklusokkal.**

- A $\pm\sqrt{\pm p}$ előállítása $4p$-edik egységgyökök összegeként.
- Az előállítás vizsgálata modulo $q \neq p$ prím.
- Egy $\overline{\mathbb{F}_q}$-beli szám pontosan akkor van $\mathbb{F}_q$-ban, ha $q$-adik hatványa önmaga.

**2. Hilbert-féle elágazás-elmélet.**

- A Galois-csoport hatása egy adott prímet osztó nagyobb testbeli prímeken; a hatás tranzitív.
- Egy adott elem stabilizátora, mint az elágazási részcsoport; ebből szürjektív homomorfizmus a modulo $p$ Galois csoportra.
- Kapcsolat polinomok modulo $p$ és $\mathbb{Q}$ feletti Galois csoportja között.

**3. Ostrowski tétele a racionális számok testén értelmezhető abszolútértékekről.**

- Arkhimédeszi- és nem-arkhimédeszi abszolútértékek, ultrametrikus egyenlőtlenség.
- Abszolútértékek ekvivalenciája.
- $\mathbb{Q}$-n ekvivalencia erejéig csak a valós, a triviális, és bármely $p$ prímre a $p$-adikus abszolútértékek vannak.

## Tudományos előadás vázlata

# Funktoriális kapcsolatok a $p$-adikus Langlands programban

A habilitációs előadás idegen nyelvű összefoglaló részét angolul tervezem megtartani.

A $p$-adikus lokális Langlands program kapcsolatot keres két, látszólag különböző fogalom között. Az egyik a *Galois reprezentációk* fogalma, ami alatt jelen esetben a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ csoport folytonos lineáris reprezentációit értjük $\mathbb{Q}_p$ feletti véges dimenziós vektortereken, ahol $\mathbb{Q}_p$ a $p$-adikus számok teste, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ annak algebrai lezártja, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ pedig a $\overline{\mathbb{Q}_p}$ test ($p$-adikusan) folytonos automorfizmusainak csoportját jelöli. A másik az *automorf reprezentációk* fogalma, ami a $p$-adikus Langlands programban a $\mathbb{Q}_p$ feletti $n \times n$-es invertálható mátrixok $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ csoportjának folytonos lineáris reprezentációit jelenti $p$-adikus Banach-tereken (azaz valamilyen $p$-adikus normára nézve teljes, általában végtelen dimenziós vektortereken). Az előadásban áttekintem a különböző eddigi konstrukciókat a két kategória között létesített funktorokra, rámutatok az azok közti összefüggésekre, különös tekintettel a saját eredményeimre a témában.