EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

LETTNER TÍMEA

AZ INTEGRÁLELMÉLET FEJLŐDÉSE RIEMANN ÓTA

BSc szakdolgozat

ALKALMAZOTT MATEMATIKUS SZAKIRÁNY

TÉMAVEZETŐ: LÓCZI LAJOS

ADJUNKTUS, NUMERIKUS ANALÍZIS TANSZÉK

TARTALOM

1. FEJEZET 3
BEVEZETŐ 3
2. FEJEZET 5
2.1 A RIEMANN-INTEGRÁL FOGALMA 5
2.2 A LEBESGUE-INTEGRÁL FOGALMA 8
3. FEJEZET 14
3.1 A HENSTOCK-KURZWEIL-INTEGRÁL 14
3.2 A McSHANE-INTEGRÁL FOGALMA 17
4. FEJEZET 19
4.1 AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS ALAPTÉTELÉNEK ELSŐ RÉSZE. 19
4.2 AZ INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK TERE 23
4.3 KONVERGENCIATÉTELEK 27
5. FEJEZET 33
5.1 ÖSSZEHASONLÍTÁS 33
5.2 UTÓSZÓ 37
IRODALOM 39

1. FEJEZET

BEVEZETŐ

A matematikai analízis egyik legfontosabb kérdése a függvénygörbe alatti terület kiszámítása, amely megoldása a határozott integrál fogalmának bevezetéséhez vezetett.

A határozott integrálás szemléletesen azt jelenti, hogy kiszámítjuk az $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja és az x-tengely közti területet. Ezzel a szemléletes képpel tovább gondolkodva először természetesen az adódik, hogy integrálni csakis nemnegatív értékű folytonos függvényeket lehet. Később kiterjesztették az integrálás fogalmát egyre szélesebb függvényosztályokra is, megfelelő gyengébb feltételek mellett mind a nemnegativitás, mind pedig a folytonosság követelménye elhagyható.

Szakdolgozatom célja, hogy bemutassam a napjainkig kialakult integrálfogalmak közül a jelentősebbeket – a 2. fejezetben a Riemann- és a Lebesgue-integrált, a 3. fejezetben a Henstock-Kurzweil- és a McShane-integrált. Az idők folyamán rengeteg integrálfogalom fejlődött ki, közöttük sok ekvivalens, vagy éppen kevésbé használható. Ezek után a 4. fejezetben az alábbi szempontok szerint megvizsgálom, hogy melyik integrál jobb, vagy kevésbé jó, mint a másik. Ezek a szempontok:

1) A Newton-Leibniz szabály alkalmazhatósága, azaz, hogy az Integrálszámítás alaptételének első része milyen feltételek mellett mondható ki. Röviden az $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$ formula fennállását vizsgáljuk.
2) Az integrálható függvények terének tulajdonságai, azaz bevezetjük a távolság, és a norma fogalmát, majd megvizsgáljuk, hogy ezekkel az adott tér teljes-e.
3) A különböző konvergenciatételek fennállását nézzük meg, ezek a Monoton, a Dominált és a Korlátos Konvergencia tételei. Röviden, megvizsgáljuk az $\int_I \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k$ egyenlőség teljesülését.

Az 5. fejezetben összefoglalom a 4. fejezet levezetéseit és eredményeit, látni fogjuk, hogy melyik integrálfogalom ekvivalens a másikkal, vagy éppen tartalmazza a másikat, és ezeket a kapcsolatokat ábrázolom.

Az integrál bevezetésének két módját különböztetjük meg, az egyik a konstruktív, a másik a leíró, vagy axiomatikus. A konstruktív bevezetés lényege, hogy először megfogalmazzuk magát a definíciót, majd abból vezetünk le tulajdonságokat. Ilyen módon fogjuk bevezetni a Riemann-, a Henstock-Kruzweil- és a McShane-integrálokat. A leíró bevezetés lényege, hogy előbb a tulajdonságokat ismertetjük, amelyeket elvárunk a definiálni kívánt fogalomtól, majd ezek után megkonstruáljuk a megfelelő definíciót, ami teljesíti a tulajdonságainkat. Axiomatikus értelmezést fogunk látni a Lebesgue-integrál esetében.

Folytonos függvények integráljára először Cauchy (1789-1857) adott minden esetben ellenőrizhető eredményt szolgáltató definíciót. Riemann (1826-1866) kérdése az volt, hogy milyen – nem feltétlenül folytonos – függvények esetén értelmes még integrálról beszélni. Ő alkotott először általános definíciót az integrálható függvények osztályának értelmezésére. Később bevezették a Riemann-integrál egy általánosabb verzióját, amellyel nem korlátos intervallumon vagy nem korlátos függvényeket lehet integrálni, ezt az elméletet nevezzük improprius Riemann-integrálásnak.

A Riemann-integrál definícióját sokan általánosították, köztük Henstock (1923-2007), Kurzweil (1926 -) és McShane (1904-1989), ahol is a Riemann-féle definíció módosításával az integrálható függvények egy bővebb osztályát kapjuk, sok korábban nem szereplő tulajdonsággal.

Lebesgue (1875-1941) volt az, aki ezektől a definícióktól eltérően teljesen másként állt hozzá az integrál értelmezéséhez. Ő nem azt adta meg, hogy mi is valójában egy függvény Lebesgue-integrálja, hanem azt, hogy milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie ennek az integrálnak. Tehát minden ún. mérhető, és például nemnegatív függvényhez hozzárendelt egy számot, de ezt a számot nem adta meg, csak a tulajdonságait. Ezekből a tulajdonságokból következtetett magára a definícióra.

Denjoy (1884-1974) kidolgozta saját integrálelméletét, amely meglehetősen technikás, ezért ebben a dolgozatban nem is lesz róla bővebben szó. Később adtak rá egy sokkal egyszerűbb jellemzést, de még az is meglehetősen bonyolult volt. Perron (1880 – 1975) szintén megalkotott egy integrálfogalmat, amely látszólag teljesen különbözik Denjoy definíciójától, ennek ellenére bebizonyították, hogy a két integrál ekvivalens. Sőt az is belátható, hogy a Denjoy és Perron által bevezetett fogalmak ekvivalensek az abszolút Henstock-Kurzweil- és a McShane-integrállal.

A dolgozatom során a következő jelöléseket fogom használni az egyszerűség és a közérthetőség miatt. Mivel sokféle integrálelméletről lesz szó, ezért megkülönböztetésül a következő jelöléseket fogom alkalmazni: Riemann $(R)\int_a^b f$, Lebesgue $(L)\int_a^b f$, Henstock-Kurzweil $(HK)\int_a^b f$, McShane $(MS)\int_a^b f$. A karakterisztikus függvény szintén sok helyen fog előfordulni, ezért itt definiálom: $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$ lesz az E halmaz karakterisztikus függvénye.

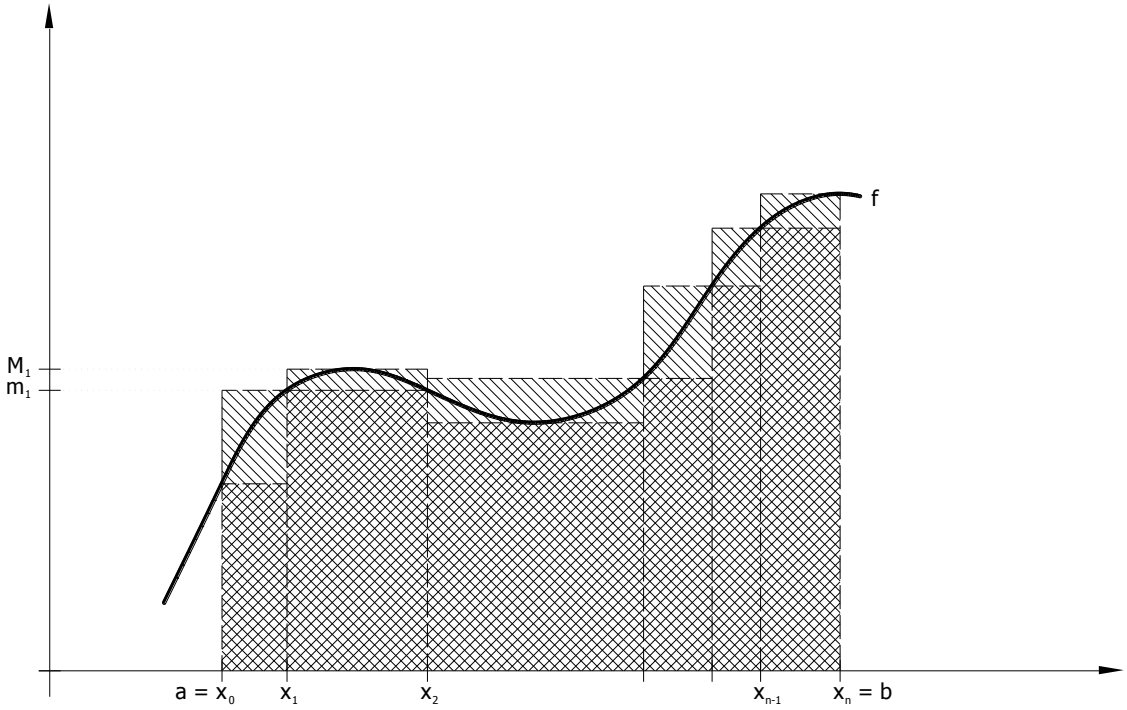
2. FEJEZET

2.1 A RIEMANN-INTEGRÁL FOGALMA

Georg Friedrich Bernhard Riemann 1854-ben definiálta először az integrál fogalmát, amit róla Riemann-integrálnak neveznek. Ez volt az első modern integrálelmélet és rendelkezik néhány, az integrálástól elvárt tulajdonsággal. A Riemann-integrálnak vannak azonban komoly hiányosságai, amelyek a matematikusokat egy ennél általánosabb fogalom kigondolására ösztönözték.

A határozott integrál bevezetését leginkább a függvénygörbe alatti terület kiszámítása motiválta. A definícióhoz szükségünk van néhány elnevezésre és jelölésre. Először a Darboux-féle definíciót nézzük meg, amely jobban érzékelteti, hogy egy adott függvény görbéje alatti területet akarunk meghatározni. Ez a definíció 21 évvel később, 1875-ben született, mint Riemann definíciója.

Az $[a,b]$ intervallum egy felosztásán olyan $x_0, x_1, \dots, x_n$ sorozatot (jelölje F) értünk, amelyre $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és legyen $m_i = \inf\{f(x): x_{i-1} \le x \le x_i\}$ és $M_i = \sup\{f(x): x_{i-1} \le x \le x_i\}$ minden $i = 1, \dots, n$-re. Értelmezzük továbbá az f függvény F felosztáshoz tartozó alsó-, illetve felső közelítő összegét: $s_F(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$, valamint $S_F(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$.



Vizsgáljuk meg először, hogy mindig van-e egy vagy több olyan szám, ami a két összeg között van.

Definíció 2.1.1: Azt mondjuk, hogy az F' felosztás az F felosztás finomítása, ha F minden osztópontja F'-nek is osztópontja.

Lemma 2.1.2: Legyen f az $[a,b]$ intervallumban korlátos függvény, és legyen F' felosztás az F felosztás finomítása. Ekkor $s_F \le s_{F'}$ és $S_F \ge S_{F'}$.

Lemma 2.1.3: Ha F_1 és F_2 az [a,b] intervallum két tetszőleges felosztása, akkor $s_{F_1} \le S_{F_2}$. Azaz, egy adott f korlátos függvényre, bármely felosztáshoz tartozó alsó összeg legfeljebb akkora, mint bármely más felosztáshoz tartozó felső összeg.

Definíció 2.1.4: Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és jelölje P az $[a, b]$ intervallum felosztásainak halmazát. Az f függvényt az $[a, b]$ intervallumban Riemann-integrálhatónak nevezzük, ha $\sup_{F \in P} s_F = \inf_{F \in P} S_F$. A $\sup_{F \in P} s_F = \inf_{F \in P} S_F$ számot az f függvény $[a, b]$ intervallumhoz tartozó Riemann-integráljának nevezzük, és $(R) \int_a^b f(x)\, dx$-szel jelöljük.

Az integrál bevezetésénél fontos szerep jutott annak, hogy csak korlátos függvényekkel foglalkoztunk. Egy nem korlátos függvény esetében előfordulhat, hogy az alsó összeg $-\infty$, a felső összeg pedig $+\infty$.

Az integrálhatóság egy szükséges és elégséges feltételét fogjuk most megfogalmazni, ami már alkalmas lesz arra, hogy tovább általánosítsuk az integrál fogalmát, lásd a 3. fejezetben.

Definíció 2.1.5: Az $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ függvénynek az $F: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ felosztáshoz és a (c_i) vektorhoz, mint közbülső helyekhez tartozó közelítő összegén az

$$I_F\big(f, (c_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

összeget értjük, ahol $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots, n)$.

A következő tételt néha szokás definícióként is kimondani. Ilyen esetben nincs szükség az alsó és felső közelítő összegek bevezetésére. Maga Riemann is ezzel a tétellel definiálta az integrálhatóságot.

Tétel 2.1.6: Egy korlátos $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre akkor és csak akkor teljesül, hogy Riemann-integrálható és az integrálja $I \in \mathbb{R}$, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan F felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, amelyhez tartozó bármely I_F közelítőösszegre $|I_F - I| < \varepsilon$.

Az alábbi állítás egy fontos elégséges feltételt ad az integrálhatóságra.

Tétel 2.1.7: Ha f folytonos $[a, b]$-n, akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-ben.

Ezt a tételt egy kicsit nagyobb általánosságban is ki tudjuk mondani.

Tétel 2.1.8: Ha f korlátos $[a, b]$-ben, és itt véges számú hely kivételével folytonos, akkor Riemann-integrálható is $[a, b]$-ben.

Tétel 2.1.9: (Newton-Leibniz-szabály): Legyen f folytonos $[a,b]$-ben, differenciálható (a,b)-ben, és f' integrálható $[a,b]$-ben, ekkor

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Bizonyítás: Legyen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ az $[a,b]$ intervallum egy felosztása. A Lagrange-középértéktétel szerint minden i-re van olyan $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ pont, amelyre $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$ teljesül. Ha ezeket összeadjuk minden $i = 1, \dots, n$-re, akkor a bal oldalon minden tag kiesik, kivéve $f(x_n) = f(b)$ és $f(x_0) = f(a)$. Így azt kapjuk, hogy

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f'(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ez azt jelenti, hogy bármely felosztáshoz vannak olyan közbülső c_i pontok, hogy az f függvénynek ezekkel a közbülső helyekkel vett közelítő összege éppen $f(b) - f(a)$. Ebből következik, hogy az $f(b) - f(a)$ szám minden felosztásra az alsó összeg és a felső összeg között helyezkedik el. Mivel f' integrálható, ezért csak egyetlen ilyen szám van: f' integrálja. □

2.2 A LEBESGUE-INTEGRÁL FOGALMA

A Riemann-integrál rendelkezik jó néhány elvárt és hasznos tulajdonsággal, de vannak hiányosságai is. Például az, hogy az integrálszámítás alaptételénél túl sokat kell megkövetelni a tétel igazsága érdekében, vagy hogy csak speciális esetben mondhatóak ki a konvergencia-tételek. Ezekkel részletesebben a 4. fejezetben foglalkozunk.

H. Lebesgue (1875-1941) a *le probléme d'intégration* (Az integrálhatóság problémája) címmel dolgozta ki elméletét. Mi is az ő útját fogjuk követni az integrálfogalmának bevezetése során.

Legyen f egy véges $[a,b]$ intervallumon értelmezett korlátos függvény. Ehhez az f-hez szeretnénk hozzárendelni egy valós számot, amelyet $(L)\int_a^b f(x)\,dx$-szel fogunk jelölni és ettől a valós számtól megköveteljük, hogy teljesítse a következő 6 tulajdonságot:

Legyen $a,b,c,h \in \mathbb{R}$, ekkor

1) $(L)\int_a^b f(x)dx = (L)\int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx.$
2) $(L)\int_a^b f(x)\,dx + (L)\int_b^c f(x)dx + (L)\int_c^a f(x)dx = 0.$
3) $(L)\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = (L)\int_a^b f(x)dx + (L)\int_a^b \varphi(x)dx.$
4) Ha $f \geq 0$ és $b > a$, akkor $(L)\int_a^b f(x)dx \geq 0.$
5) $(L)\int_0^1 1\,dx = 1.$
6) Ha $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ monoton növő módon tart f-hez, akkor $(L)\int_a^b f_k(x)dx \to (L)\int_a^b f(x)dx.$

Más szóval, leírtuk azokat a tulajdonságokat, amelyeket szeretnénk, hogy teljesítsen az integrálás, majd ezután megpróbálunk következtetni a definícióra ezekből a tulajdonságokból. Az ilyen definiálást leírónak nevezzük, szemben a konstruktív definiálással, ahol elkészítünk egy objektumot, majd a definícióból vezetjük le a tulajdonságait. Konstruktív definícióval értelmeztük a Riemann-integrált, és így fogjuk értelmezni a Henstock-Kurzweil-, és a McShane-integrált is.

Ezeket a tulajdonságokat feltételezve levezethetőek a következők:

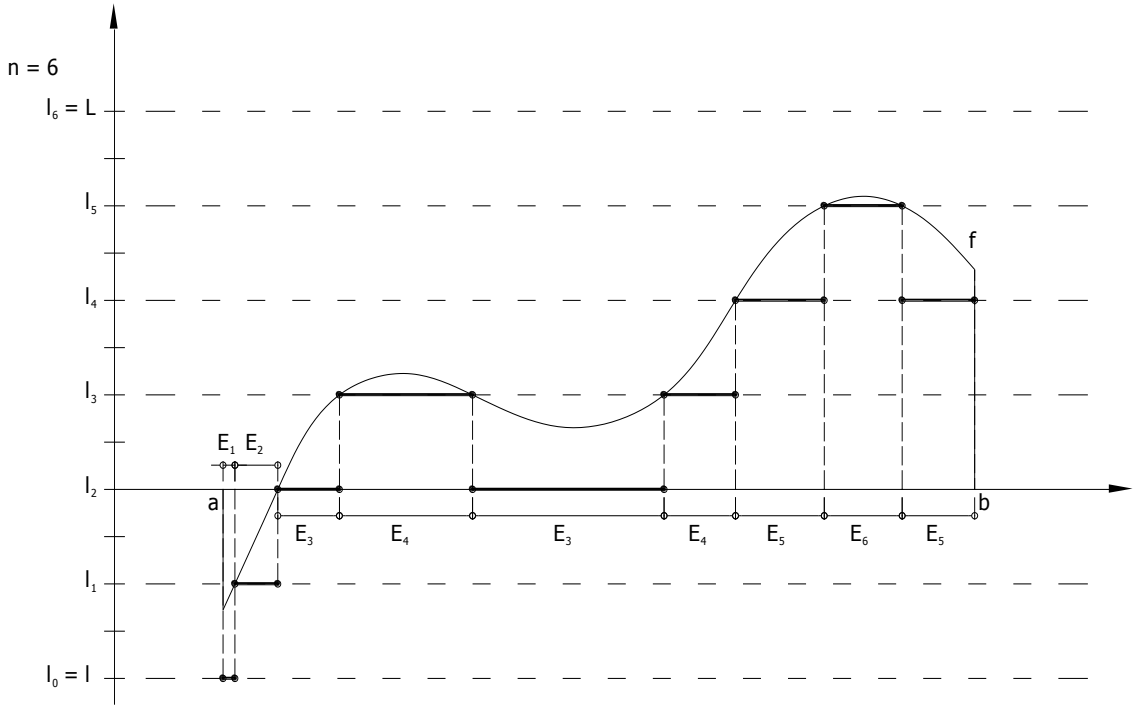
a) Ha $f \geq g$ akkor $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$
b) $\int_a^b 1\,dx = b - a.$
c) Minden $\alpha \in \mathbb{R}$-re $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$
d) $\int_a^b 0\,dx = 0.$
e) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

Az első 5 tulajdonsággal rendelkezik a Riemann-integrál is. Tehát a 6. tulajdonság az, amivel Lebesgue integrálja többet tud.

Tegyük fel, hogy $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos. Rögzítsünk le egy l és L konstanst úgy, hogy $l \leq f < L$. Legyen adott egy $P = \{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ felbontása a $[l,L]$ intervallumnak, ahol

$l_0 = l,\ l_n = L$ és $l_i < l_{i+1}$ minden $i = 1, \dots, n$-re. Itt megjegyezhetjük, hogy ez a felosztás a függőleges tengelyt osztja fel, nem pedig a vízszinteset, ahogy azt a Riemann-integrálás során megszoktuk. Legyen továbbá $E_i = \{x \in [a,b]: l_{i-1} \leq f(x) < l_i\}$ minden $i = 1, \dots, n$-re. Tekintsük a következő φ függvényt:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} l_{i-1} \chi_{E_i}(x).$$



Ekkor $\varphi \leq f$ az $[a,b]$-n és az integrál linearitása miatt $\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} l_{i-1} \int_a^b \chi_{E_i}(x)dx$. Most rögzítsünk le egy $P_0 = \{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ felbontást és definiáljuk a $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozatot:

1) P_k legyen a finomítása a P_{k-1}-nek minden $k = 1,2, \dots$-ra.
2) $\mu(P_k) \leq \frac{1}{2}\mu(P_{k-1})$ minden $k = 1,2, \dots$-ra, ahol μ a finomság mértéke. A finomság az osztópontok között fellépő legnagyobb távolság.

Legyen φ_k hasonlóan értelmezve, mint φ, csak a P_k felosztással. Ekkor $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat monoton növően tart f-hez. Valójában, a konstrukció miatt, $0 \leq f - \varphi_k < \mu(P_k)$ és

$\mu(P_k) \to 0$, tehát $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ egyenletesen konvergál f-hez az $[a,b]$-n. Következésképpen a 6-os tulajdonságot alkalmazva kapjuk, hogy $\int_a^b \varphi_k \to \int_a^b f$.

Tehát ahhoz, hogy kiértékeljük az f integrálját, elég, ha ki tudjuk számolni a φ_k-k integrálját, amihez viszont $\int_a^b \chi_E(x)dx$ kiszámítása kell. Lebesgue azt mondta, hogy „ahhoz, hogy ki tudjuk számolni egy függvény integrálját elég, ha ki tudjuk számolni az olyan függvények integrálját, amelyek csak 0-t és 1-et vesznek fel". Evvel redukálta a problémát arra, hogy hogyan lehet tetszőleges halmaz méretét meghatározni. A cél tehát az, hogy minél több $E \subset \mathbb{R}$ halmazhoz hozzá tudjunk rendelni egy $m(E)$ nemnegatív számot, amely rendelkezik a következő 3 tulajdonsággal:

1) Az egybevágó halmazok mértéke ugyanaz legyen.
2) Egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen páronként diszjunkt halmazokból álló unió mértéke legyen egyenlő a halmazok mértékének összegével.
3) A $[0,1]$ halmaz mértéke legyen 1.

Az eddigieket összefoglalva tehát a Lebesgue-integrál definíciójának lépései: a mérték fogalmának bevezetése, a mérhető halmazok és függvények megismerése, a lépcsősfüggvények integráljának definiálása, majd ezek segítségével a mérhető függvények integráljának értelmezése.

I. ***Külső mérték***: Az intervallumhossz (l-el jelöljük) fogalmát szeretnénk kiterjeszteni általános halmazokra, úgy hogy a hossz tulajdonságai megmaradjanak. Egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmazrendszer jelölésére a σ-t fogjuk használni.

Definíció 2.2.1: Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Értelmezzük az E halmaz külső mértékét, $m^*(E)$-t, a következőképpen: $m^*(E) = \inf\{\sum_{j\epsilon\sigma} l(I_j)\}$, ahol $\{I_j\}_{j\in\sigma}$ a nyílt intervallumok rendszere, és

$$E \subset \bigcup_{j\in\sigma} I_j.$$

Bebizonyítható, hogy a külső mérték az alábbi tulajdonságokat teljesíti:

1) m^* monoton, azaz ha $F \subset E \subset \mathbb{R}$, akkor $m^*(F) \leq m^*(E)$.
2) Ha I egy intervallum, akkor $m^*(I) = l(I)$.
3) m^* szubadditív, azaz ha $E_i \subset \mathbb{R}$, minden $i \in \sigma$-ra, akkor $m^*(\bigcup_{i\in\sigma} E_i) \leq \sum_{i\in\sigma} m^*(E_i)$.

Ebből következik, hogy ha $E \subset \mathbb{R}$ egy megszámlálható halmaz, akkor $m^*(E) = 0$.

II. ***Lebesgue-mérték***: Az m^* nem megszámlálhatóan additív. Hogy azzá tegyük, le kell szűkítenünk az értelmezési tartományát egy alkalmas $P(\mathbb{R})$-beli halmazrendszerre. Ezen halmazrendszer tagjait nevezzük Lebesgue-mérhető halmazoknak. Lebesgue a következő feltételt dolgozta ki a mérhető halmazokra. Legyen $I = [a, b]$ egy zárt korlátos intervallum, és $E \subset I$, valamint definiáljuk az E belső mértékét az $m_*(E) = (b - a) - m^*(I \backslash E)$ képlettel. Lebesgue azt mondta, hogy egy $E \subset I$ halmaz mérhető, ha $m^*(E) = m_*(E)$. Ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy $m^*(I) = m^*(E) + m^*(I \backslash E)$. Ezzel az a baj, hogy nem értelmes tetszőleges E halmazra, ugyanis $\mathbb{R}$ mértéke ∞. A megoldást Constantin Carathéodorynak köszönhetjük. Az volt az ötlete, hogy minden halmazt vizsgáljunk meg, ne csak azt, ami tartalmazza E-t. Carathéodory feltétele: Egy $E \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor mérhető, ha minden $A \subset \mathbb{R}$-re $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \backslash E)$. Megmutatható, hogy a két mérhetőségi fogalom ugyanaz.

Definíció 2.2.2: Legyen M a Lebesgue-mérhető halmazokból álló halmazrendszer. m^* megszorítását M-re nevezzük Lebesgue-mértéknek. Jele: $m = m^*|_M$.

Ekkor nyilván, ha $E \in M$, akkor $m(E) = m^*(E)$. Az üreshalmaz, az intervallumok és $\mathbb{R}$ Lebesgue-mérhetőek.

III. Mérhető függvények: Legyen $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. A lépcsősfüggvényeket úgy értelmezzük, hogy csak véges sok értéket vehetnek fel, és azok mindegyike valós. Minden φ lépcsősfüggvénynek létezik kanonikus alakja: legyenek $a_1, \dots, a_m$ különböző valós számok és $E_i = \{x\colon\ \varphi(x) = a_i\}$, $i = 1, \dots, m$. Ekkor $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}(x)$.

Definíció 2.2.3: Legyen E egy mérhető halmaz $\mathbb{R}$-en. Azt mondjuk, hogy az $f\colon E \to \mathbb{R}$ valós értékű függvény Lebesgue-mérhető, ha minden $\alpha \in \mathbb{R}$-re $\{x \in E\colon\ f(x) > \alpha\} \in M$.

Egy lépcsősfüggvény akkor és csak akkor mérhető, ha a kanonikus alakjában szereplő minden, E_i halmaz mérhető.

IV. Lebesgue-integrál: Az integrál fogalmát először lépcsősfüggvényekre vezetjük be, majd abból általánosítunk. Legyenek az I_i intervallumok páronként diszjunktak, és $f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{I_i}(x)$. Ekkor

$$(L)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} a_i m(I_i).$$

Ugyanígy szól a definíció ha az I_i intervallumok helyett mérhető halmazok szerepelnek az f függvény definíciójában. A lépcsősfüggvények segítségével tudjuk kiterjeszteni az integrált a nemnegatív mérhető függvényekre.

Definíció 2.2.4: Legyen $E \in M$ és $f: E \to \mathbb{R}$ nemnegatív, mérhető függvény. Definiáljuk f Lebesgue-integrálját az alábbi formulával:

$$(L)\int_E f(x)dx = \sup\left\{(L)\int_E \varphi(x)dx:\ 0 \le \varphi \le f \text{ és } \varphi \text{ lépcsősfüggvény}\right\}$$

Az f függvény nemnegativitása elhagyható a következőképpen: egy f mérhető függvény Lebesgue-integrálja egyenlő a pozitív részének Lebesgue-integrálja mínusz a negatív részének Lebesgue-integráljával. Csak az olyan függvények integrálját értelmezzük, ahol nem lép fel a $\infty - \infty$ eset. Nyilvánvalóan mind a pozitív rész, mind a negatív rész nemnegatív, mérhető függvények, azoknak meg az imént értelmeztük a Lebesgue-integrálját.

A Lebesgue-integrál fontos sajátossága, hogy nem érzékeny arra, hogy a függvényt néhány helyen (pontosabban nullmértékű halmazon) átdefiniáltuk, azaz mondjuk olyan értékeket adtunk neki, amelyek miatt már nem lesz folytonos a függvényünk, azaz pl. nem lesz Riemann-integrálható. Ahhoz, hogy ezt pontosan el tudjuk mondani, szükségünk van a Lebesgue-0-mértékű halmazok definíciójára.

Definíció 2.2.5: Legyen $E \subset \mathbb{R}$. Az E-t *Lebesgue-0-mértékű*nek mondjuk, ha minden $\delta > 0$-hoz létezik az E-nek megszámlálható sok nyílt intervallumból álló lefedése, hogy az intervallumok összhossza kisebb δ-nál.

Nyilvánvalóan minden véges halmaz Lebesgue-0-mértékű, de vannak olyan nem véges halmazok is, amelyek Lebesgue-0-mértékűek. Például a megszámlálható halmazok.

Most értelmezzük a *Lebesgue-m.m. (Lebesgue-majdnem mindenütt)* fogalmat.

Azt mondjuk, hogy egy tetszőleges állítás az E halmaz pontjairól majdnem mindenütt (m.m.) teljesül, azaz majdnem minden pontra az E halmazból, ha csak ezen pontok egy Lebesgue-0-mértékű halmazán nem teljesül.

Így tehát a m.m. egyenlő függvényeket a Lebesgue-integrál keretében egyenlőnek tekintjük, mert az integráljuk ugyanaz lesz, hiszen az integrálásnál elhagyhatóak a Lebesgue-0-mértékű halmazokon vett integrálok.

3. FEJEZET

3.1 A HENSTOCK-KURZWEIL-INTEGRÁL

A Henstock-Kurzweil-integrál a Riemann-féle definíció egy igen jó általánosítása, hiszen nemcsak hogy sokkal több függvény integrálható Henstock-Kurzweil értelemben, hanem sok hasznos tulajdonsággal bír, amelyekkel a Riemann-integrál nem, például feltételek nélkül alkalmazható a Newton-Leibniz formula.

A Riemann-integrál definíciójában szereplő δ pozitív szám helyett egy $\delta(.)$ pozitív függvényt értelmezünk. Ennek egy nagyon fontos tulajdonsága, hogy pontról pontra alkalmazkodni tud az *f* függvény viselkedéséhez. Ha az *f* függvény az adott pont körül simán viselkedik, akkor elegendő δ-t nagynak választani, ha pedig az adott pont környezetében nagy ugrásai vannak *f*-nek, akkor célszerű δ-t kicsinek választani.

Az integrál bevezetéséhez szükségünk van a címkézett felbontás definiálására. Ennek érdekében megismerkedünk néhány fontos fogalommal, jelöléssel.

Definíció 3.1.1: Legyen $\delta(.)$ az $[a,b]$-n értelmezett tetszőleges pozitív függvény.

1) Az $(x,[c,d])$ párt *címkézett intervallum*nak nevezzük, ha $[c,d]\subset[a,b]$, $c<d$ és $x\in[c,d]$. Az $(x,[c,d])$ pár *független címkézett intervallum* abban az esetben, ha $[c,d]\subset[a,b]$, és $x\in[a,b]$.
2) Azt mondjuk, hogy az $(x,[c,d])$ címkézett intervallum a δ függvényhez tartozik, ha $[c,d]\subset(x-\delta(x),x+\delta(x))$. Hasonlóan definiálható a δ-hoz tartozás a független címkézett intervallumok esetében is.

A független címkézett intervallum fogalmára majd csak a McShane-integrál bevezetése során lesz szükségünk.

Az *x* számot hívjuk a $[c,d]$ intervallum *címké*jének. Vegyünk egy olyan véges $P=\{(x_i,[c_i,d_i]):i=1,\dots,n\}$ halmazt, ahol a $[c_i,d_i]$ intervallumoknak nincs közös belső pontjuk, azaz csak a végpontjaikban érintkezhetnek. Az ilyen intervallumokat nevezzük *nemátlapolónak*. Ezt a P címkézett intervallumhalmazt δ-*hoz tartozónak* nevezzük, ha

minden címkézett intervallum a P-ből δ-hoz tartozik. P-t *címkézett felbontás*nak nevezzük, ha $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n}[c_i, d_i]$.

A későbbi bizonyítások során szükségünk lesz arra, hogy mérni tudjuk a címkézett intervallum méretét, erre bevezetjük a *gauge* fogalmát. Sőt az integrált akár definiálhatnánk a gauge segítségével is. Ezt a lehetőséget a nagyon hasonlóan értelmezhető McShane-integrál esetében részletezzük.

Definíció 3.1.2: Legyen adott egy $I = [a,b]$ zárt intervallum. Értelmezzük a γ intervallumértékű függvényt, gauge-t, a következőképpen: ha adott $\delta: [a,b] \to (0,\infty)$, akkor $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$. Ha $D = \{(t_i, I_i): i = 1, \dots, n\}$ egy címkézett felbontása *I*-nek, ahol γ a gauge, akkor *D*-t γ-méretűnek nevezzük, ha $I_i \subset \gamma(t_i)$ minden *i*-re.

Bebizonyítható, hogy ha γ egy gauge az I intervallumon, akkor létezik I-nek γ-méretű címkézett felbontása.

Tekintsük az integrál bevezetéséhez szükséges következő jelöléseket.

Legyen f az $[a,b]$ intervallumon értelmezett függvény, és $P = \{(x_i, [c_i, d_i]): i = 1, \dots, n\}$. Ekkor legyen:

$$I(f,P) = \sum_i f(x_i)(d_i - c_i) \quad \text{és} \qquad \mu(P) = \sum_i (d_i - c_i).$$

Most már definiálni tudjuk a Henstock-Kurzweil-integrál fogalmát:

Definíció 3.1.2:

1) Az f $[a,b]$-n értelmezett függvényt Henstock-Kurzweil-integrálhatónak nevezzük, ha létezik egy $I \in \mathbb{R}$ szám a következő tulajdonsággal: minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta: [a,b] \to (0,\infty)$ úgy, hogy $|I(f,P) - I| < \varepsilon$ teljesül, ha P tetszőleges, δ-hoz tartozó címkézett felbontására az $[a,b]$-nek. Az I számot nevezzük az f függvény Henstock-Kurzweil integráljának, és az alábbi jelölést használjuk

$$I = (HK)\int_a^b f.$$

2) Az f függvényt Henstock-Kurzweil-integrálhatónak nevezzük az $E \subset [a,b]$ Lebesgue-mérhető halmazon, ha az $f\chi_E$ Henstock-Kurzweil integrálható.

Az is belátható, hogy elég az f függvényt Lebesgue-m.m. értelmezni csak, mert ismert, hogy a Lebesgue-0-mértékű halmazon való megváltoztatás nem jelent változást az integrálhatóságban és az integrál értékében a Henstock-Kurzweil-integrál esetében sem.

A következő két állítás mutatja meg, hogy a Henstock-Kurzweil-integrál jóldefiniált.

Tétel 3.1.3: Legyen δ az $[a,b]$-n értelmezett pozitív függvény. Ekkor létezik $[a,b]$-nek δ-hoz tartozó címkézett felbontása.

Tétel 3.1.4: Egy függvény Henstock-Kurzweil-integrálja egyértelmű.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy f Henstock-Kurzweil-integrálható az $[a,b]$-n és A, B legyenek az integráljai. Rögzítsünk le egy $\varepsilon > 0$-t, és legyen γ_A, γ_B a δ_A-hoz, illetve δ_B-hez tartozó intervallumértékű függvény, amelyet a $\gamma_A(t) = (t - \delta_A(t), t + \delta_A(t))$, és $\gamma_B(t) = (t - \delta_B(t), t + \delta_B(t))$ formula definiál, valamint az integrál definícióját tekintsük $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$-vel. Legyen $\gamma(t) = \gamma_A(t) \cap \gamma_B(t)$, valamint $\delta(t) = \min\{\delta_A(t), \delta_B(t)\}$. Ekkor $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$. Legyen P egy δ-hoz tartozó címkézett felbontás. Ekkor P egyúttal γ-hoz is tartozik, azaz γ_A-hoz és γ_B-hez is. Ezek alapján

$$|A - B| \leq |A - I(f,P)| + |I(f,P) - B| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, ezért $A = B$. □

Bebizonyítható, hogy a Henstock-Kurzweil-integrálra érvényesek az integráltól elvárt alaptulajdonságok:

Linearitás: Legyen $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ha f és g Henstock-Kurzweil integrálható, akkor $\alpha f + \beta g$ is az, valamint

$$(HK)\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha\,(HK)\int_a^b f + \beta\,(HK)\int_a^b g.$$

Nemnegativitás: Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f nemnegatív és Henstock-Kurzweil integrálható, ekkor $(HK)\int_a^b f \geq 0$.

Következmény 3.1.5: Tegyük fel, hogy f és g Henstock-Kurzweil-integrálható az $[a,b]$-n és $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Ekkor $(HK)\int_a^b f \leq (HK)\int_a^b g$.

Következmény 3.1.6: Ha f abszolút integrálható, azaz $|f|$ integrálható az $[a,b]$-n, akkor $\left|(HK)\int_a^b f\right| \leq (HK)\int_a^b |f|$.

3.2 A McSHANE-INTEGRÁL FOGALMA

Tekintsük a következő változtatást a Henstock-Kurzweil-integrál definíciójában. Legyen γ egy gauge az I intervallumon és legyen D egy γ-méretű címkézett felbontása az I-nek. Tegyük fel, hogy felhagyunk azzal a követelménnyel, hogy ha $(t,J) \in D$, akkor $t \in J$ kell, hogy legyen; másszóval azt tesszük fel, hogy a címke lehet a J-n kívül is. Ekkor tehát, még mindig megköveteljük, hogy $\{J: (t,J) \in D\}$ felbontása legyen az I intervallumnak, és $J \subset \gamma(t)$ teljesüljön, de most csak annyit írunk elő ezeken kívül, hogy $t \in I$ legyen. Ennek a kiterjesztésnek az elméletét ugyanilyen meggondolásokkal E. J. McShane (1904-1989) dolgozta ki.

Minden γ-méretű címkézett felbontása az I-nek kielégíti ezt az új definíciót, de D tartalmazhat még más halmazokat is. Ezért minden McShane-integrálható függvény Henstock-Kurzweil-integrálható is, de nem minden Henstock-Kurzweil-integrálható függvény McShane-integrálható. Látni fogjuk, hogy minden abszolút Henstock-Kurzweil-integrálható függvény Lebesgue-integrálható, és a Lebesgue-integrál ekvivalens a McShane-integrállal.

Ezek után vezessük be pontosan megfogalmazva a McShane-integrál fogalmát.

Legyen $I \subset \mathbb{R}^*$ egy zárt intervallum (esetleg nem korlátos) és legyen $f: I \to \mathbb{R}$. Mindig tekinthetünk f-re úgy, hogy ki van terjesztve az egész $\mathbb{R}^*$-ra; méghozzá legyen f az I-n kívül 0, valamint $f(\infty) = f(-\infty) = 0$.

Definíció 3.2.1: Legyen $I \subset \mathbb{R}^*$ egy zárt intervallum. A D-vel jelölt *független címkézett felbontás* rendezett párok egy véges rendszere. Feltesszük továbbá, hogy $D = \{(t_i, I_i): i = 1, \dots, m\}$ úgy, hogy I_i egy zárt részintervalluma az I-nek és $\bigcup_{i=1}^m I_i = I$. Az I_i-k nemátlapoló intervallumok és $t_i \in I$.

Definíció 3.2.2: Legyen $D = \{(t_i, I_i): i = 1, \dots, m\}$ egy független címkézett felbontása az I-nek és legyen γ egy gauge az I-n. Azt mondjuk, hogy D γ-méretű, ha $I_i \subset \gamma(t_i)$ minden i-re.

Az integrál értelmezéséhez szükséges megemlíteni, hogy γ-méretű független címkézett felbontás mindig létezik. Egy ugyanilyen állítást a Henstock-Kurzweil-integrál esetében is elmondtunk, csak ott γ-méretű címkézett felbontásokra. Az integrál fogalmát a Henstock-Kurzweil-integráléhoz analóg módon is bevezethetnénk, de most a gauge fogalmát felhasználva fogjuk azt értelmezni. A két értelmezés nyilván ekvivalens egymással. És ehhez hasonlóan, a Henstock-Kurzweil-integrált is bevezethettük volna gauge segítségével.

Definíció 3.2.3: Legyen $f: I \subset \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$. Az f függvényt *McShane-integrálható*nak nevezzük az I intervallumon, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan γ gauge az I-n, hogy minden D γ-méretű független címkézett felbontására az I-nek

$$|I(f, D) - A| < \varepsilon.$$

Az *A* számot hívjuk az *f* McShane-integráljának és $A = (MS) \int_I f$-fel jelöljük.

Néhány megfigyelés azonnal következik a Henstock-Kurzweil-integrálra vonatkozó megfelelő tételből. Például, minden McShane-integrálható függvény egyben Henstock-Kurzweil-integrálható is, és az integrálok megegyeznek. Valamint használva a Henstock-Kurzweil-integrál egyértelműségét kapjuk, hogy a McShane-integrál is egyértelmű.

Gondoljuk meg a 3.2.3 definíciónak megfelelően, hogy egy zárt I intervallum karakterisztikus függvénye Henstock-Kurzweil-integrálható és az integrálja $(MS) \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_I = l(I)$. Ha I-nek vannak végpontjai a és b, $a < b$, akkor legyen $\gamma(t) = (a, b)$ minden $t \in (a, b)$ esetén, $\gamma(a) = \left(a - \frac{\varepsilon}{4}, a + \frac{\varepsilon}{4}\right)$, $\gamma(b) = (b - \frac{\varepsilon}{4}, b + \frac{\varepsilon}{4})$ és ha $t \notin [a, b]$, akkor $\gamma(t)$ legyen egy $[a, b]$-től diszjunkt intervallum. Ekkor könnyen belátható, hogy minden γ-méretű független címkézett D felbontásra $|I(f, D) - (b - a)| < \varepsilon$.

Ezek után néhány fontos alaptulajdonságot írunk le bizonyítás nélkül, amelyeket nagy részben már a Henstock-Kurzweil-integrálnál is láttunk.

1) Legyen $f, g: I \subset \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ McShane-integrálható az I-n. Ekkor

   Linearitás: Ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha f + \beta g$ McShane-integrálható és

$$(MS)\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha(MS)\int_I f + \beta(MS)\int_I g.$$

Nemnegativitás: Ha $f \leq g$ az egész I-n, akkor $(MS)\int_I f \leq (MS)\int_I g$.

2) **Cauchy-kritérium:** Az $f: I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor McShane-integrálható az I-n, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy γ gauge úgy, hogy ha D_1 és D_2 két γ-méretű független címkézett felbontása az I-nek, akkor $|I(f, D_1) - I(f, D_2)| < \varepsilon$.
3) Legyen I egy zárt, korlátos részintervalluma $\mathbb{R}$-nek. Ha $f: I \to \mathbb{R}$ folytonos az I-n, akkor f McShane-integrálható is az I intervallumon.
4) Legyen $-\infty \leq a < c < b \leq +\infty$. Ekkor f McShane-integrálható az $[a, b]$-n pontosan akkor, ha f McShane-integrálható az $[a, c]$-n és a $[c, b]$-n, továbbá

$$(MS)\int_a^b f = (MS)\int_a^c f + (MS)\int_c^b f.$$

Most megnézzük, hogy mi a különbség a McShane-integrál és a Henstock-Kurzweil-integrál között. Nevezetesen azt tekintjük, hogy a McShane-integrálható függvények abszolút integrálhatóak, míg a Henstock-Kurzweil-integrálhatóak nem.

Tétel 3.2.4: Legyen $f: I \to \mathbb{R}$ McShane-integrálható az I-n. Ekkor $|f|$ is McShane-integrálható az I-n, valamint

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.$$

4. FEJEZET

4.1 AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS ALAPTÉTELÉNEK ELSŐ RÉSZE

Az irodalomban a derivált integrálhatóságára vonatkozó tételt nevezik az integrálszámítás alaptétele első részének. Ez a tétel kapcsolja össze a határozott

integrálás és a differenciálás műveletét, és látni fogjuk, hogy ez a két művelet bizonyos értelemben egymás inverzének tekinthető.

Legyen az $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható az $[a, b]$-n és deriváltja f'. A tétel a következő formula fennállását vizsgálja: $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

Tétel 4.1.1 : Tegyük fel, hogy $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ és f' Riemann-integrálható az $[a, b]$-n. Ekkor fennáll, hogy $(R) \int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

Ezt a tételt bizonyítottuk be 2.1.9-es tételben.

A 4.1.1-es tételben a lényeges feltevés f' Riemann-integrálhatósága. A következő példa azt fogja mutatni, hogy e nélkül a tétel nem is igaz.

Példa 4.1.2: Definiáljuk az f : [0,1] → $\mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{\pi}{x^2}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ekkor f differenciálható a [0,1]-en, és deriváltja

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x} \sin\frac{\pi}{x^2}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Látható, hogy f' nem korlátos a $[0,1]$-en, tehát nem is Riemann-integrálható.

Belátjuk, hogy ez az f' nem is Lebesgue-integrálható, tehát az integrálszámítás alaptételének első része a Lebesgue-integrál esetében sem mondható ki a teljes általánosságban. Ahhoz, hogy a tételt kimondhassuk, elegendő feltenni, hogy a derivált korlátos legyen.

Mivel f' a 0 környezetében válik nem korlátossá, ezért legyen $0 < a < b < 1$. Ekkor f' folytonos az $[a, b]$-n, tehát Riemann-integrálható, ezért alkalmazható a 4.1.1 tétel, amiből (felhasználva, hogy a Lebesgue-integrál a Riemann-integrál kiterjesztése az itteni feltétek esetén):

$$(L)\int_a^b f' = b^2\cos\frac{\pi}{b^2} - a^2\cos\frac{\pi}{a^2}.$$

Nézzük a következő két sorozatot: $b_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}$ és $a_k = \sqrt{\frac{2}{4k+1}}$. Ekkor látjuk, hogy $\int_{a_k}^{b_k} f' = \frac{1}{2k}$. Az $[a_k, b_k]$ intervallumok páronként diszjunktak, ezért

$$(L)\int_0^1 |f'| \geq \sum_{k=1}^{\infty}(L)\int_{a_k}^{b_k} |f'| \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k} = \infty.$$

Tehát fel kell tennünk az integrálszámítás alaptételéhez, hogy f' Lebesgue-integrálható legyen. Ennél egy kicsit gyengébb tételt is kimondhatunk, a speciális esetét, lásd a 4.1.4-as tételben.

Tétel 4.1.3: Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható az $[a, b]$-n és f' Lebesgue-integrálható az $[a, b]$-n. Ekkor $(L)\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

Tétel 4.1.4: Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható az $[a, b]$-n és tegyük fel, hogy f' korlátos. Ekkor f' Lebesgue-integrálható az $[a, b]$-n és

$$(L)\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

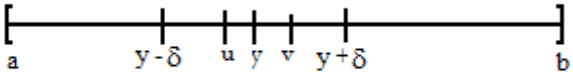
A 4.1.2 példában lévő f' nem korlátos volta ellenére Henstock-Kurzweil-integrálható és integrálja a $[0,1]$-en -1. Most belátjuk, hogy a Henstock-Kurzweil integrálra teljes általánosságban elmondható az integrálszámítás alaptételének első része.

Tétel 4.1.5: Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és megszámlálhatóan sok pont kivételével differenciálható, a kimaradó pontok alkossák a $C = \{c_n\}$ halmazt. Ekkor az f' (amit a C pontjaiban 0-nak definiálunk) Henstock-Kurzweil-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, továbbá

$$(HK)\int_a^z f' = f(z) - f(a), \qquad \text{minden } z \in [a, b] \text{ mellett.}$$

A tétel bizonyításához szükségünk van az ún. Terpeszállás lemmára, amely arról szól, hogy a differenciálhatóság definíciójában $f'(u)$ kicserélhető egy olyan $f'(y)$-ra, ahol az y

az u és a v között van, az u, v pontok pedig egy y fölé gondolt $(y-\delta, y+\delta)$ terpeszbe esnek.



Lemma 4.1.6: Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható az $y \in [a,b]$ pontban. Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy y-tól függő $\delta > 0$ úgy, hogy

$$|f(v) - f(u) - f'(y)(u-v)| \leq \varepsilon(v-u)$$

abban az esetben, ha $u, v \in [a,b]$ és $y - \delta < u \leq y \leq v < y + \delta$.

Bizonyítás: Rögzítsük le az $\varepsilon > 0$-t és legyen $y \in [a,b]$. Mivel f differenciálható az y-ban, ezért van egy $\delta(y) > 0$ úgy, hogyha $x \in [a,b]$ és $0 < |x-y| < \delta(y)$, akkor

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(y)\right| < \varepsilon.$$

Átszorozva $|x-y|$-nal, azt kapjuk, hogy

$$|f(x) - f(y) - f'(y)(x-y)| \leq \varepsilon|x-y|,$$

ami akkor is érvényes, ha $x = y$. Tegyük fel ezek után, hogy $u, v \in [a,b]$ és $y - \delta(y) < u \leq y \leq v < y + \delta(y)$. Ekkor $|f(v) - f(u) - f'(y)(v-u)| = |\{f(v) - f(y) - f'(y)(v-y)\} + \{f(y) - f(u) - f'(y)(y-u)\}| \leq |f(v) - f(y) - f'(y)(v-y)| + |f(y) - f(u) - f'(y)(y-u)| \leq \varepsilon(v-y) + \varepsilon(y-u) = \varepsilon(v-u)$. □

Ez után a lemma után bizonyítsuk be a 4.1.5-ös tételt.

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$. Definiáljuk a Henstock-Kurzweil integrál értelmezéséhez szükséges δ függvényt a következőképpen: ha $x \notin C$, akkor, mivel az f differenciálható az x-ben, ezért létezik $\delta(x) > 0$ úgy, hogy

$$|f(u) - f(x) - f'(x)(u-x)| \leq \varepsilon|u-x|, \ \forall u \in (x-\delta(x), x+\delta(x)) \cap [a,b], (*)$$

ha pedig $x = c_n$, akkor az f folytonossága miatt van olyan $\delta(x) > 0$, amelyre

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon 2^{-n}, \quad \forall u, v \in (x-\delta(x), x+\delta(x)) \cap [a,b]. (**)$$

Legyen $P = \{(x_i, [a_i, b_i]) : i \leq n\}$ egy δ-hoz tartozó címkézett felbontása az $[a,b]$-nek, és legyen J_0 azon i indexekből álló halmaz, amelyre $x_i \in C$, valamint J_1 álljon a kimaradó indexekből. Legyen továbbá P_0 és P_1 részei a P-nek úgy, hogy P_0 csak J_0-beli indexű x_i-ket tartalmaz, P_1 meg csak J_1-belieket.

A bizonyítás következő lépéséhez felhasználjuk a Terpeszállás lemmát. A lemma állítását alkalmazva a $(*)$ sorra kapjuk, hogy

$$|f(b_i) - f(a_i) - f'(x_i)(b_i - a_i)| \leq \varepsilon\,(b_i - a_i).$$

Vegyük észre továbbá, hogy $\sum_{i \in J_0} |f(b_i) - f(a_i)| \leq 2\varepsilon$. Ez abban az esetben, ha minden x_i amelyre $i \in J_0$, különböző, a $(**)$ sorból következik. Az általános esetben, amikor az x_i lehet két egymás utáni intervallumnak a megegyező végpontja, (azaz $[a_i, b_i]$, $[a_j, b_j]$ esetén $b_i = a_j = x_i = x_j$), akkor vannak olyan tagok az összegben, amelyeket kétszer számoltunk, azért tudunk 2ε-nal becsülni. Ekkor kihasználva feltevésünket, miszerint $f' = 0$ a C halmazon, nyerjük, hogy $|I(f', P) - [f(b) - f(a)]| \leq |I(f', P_1) - \sum_{i \in J_1} [f(b_i) - f(a_i)]| + \sum_{i \in J_0} |[f(b_i) - f(a_i)]| \leq \varepsilon(b - a) + 2\varepsilon$. □

Most megvizsgáljuk az integrálfüggvényeket és a hozzájuk kapcsolódó tételt, az integrálszámítás alaptételének második részét a Henstock-Kurzweil-integrál esetében. Azért csak ebben az esetben, mert csak így lesz a későbbiek során rá szükségünk.

Figyeljük meg, hogyha az f függvény folytonos az x pontban, akkor ott az integrálfüggvénye (F) differenciálható, ahol $F(x) = (R)\int_a^x f(t)dt$.

Tétel 4.1.7: Legyen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil-integrálható az $[a, b]$-n és folytonos az $x \in [a, b]$ pontban. Ekkor az f integrálfüggvénye F differenciálhazó az x-ben és $F'(x) = f(x)$.

Most már kimondhatjuk az integrálszámítás alaptételének második részét.

Tétel 4.1.8: Tegyük fel, hogy $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil-integrálható. Ekkor F differenciálható majdnem minden $x \in [a, b]$ pontban és $F'(x) = f(x)$.

4.2 AZ INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK TERE

Ebben a részben megismerkedünk a Riemann-, a Lebesgue- és a Henstock-Kurzweil-integrálható függvények tereivel, és megvizsgáljuk azok tulajdonságait. Egy fontos szempont a tér teljessége, ami azt jelenti, hogy minden Cauchy-sorozat konvergens, és konvergál egy térbeli függvényhez, valamint minden konvergens sorozat Cauchy tulajdonságú. Látni fogjuk, hogy ezzel a tulajdonsággal csak a Lebesgue-integrálható függvények tere rendelkezik.

Először nézzük a Lebesgue-integrálható függvények terét.

Legyen X egy nemüres halmaz, és $d: X \times X \to [0, \infty)$ ún. *távolságfüggvény* az X-en a következő tulajdonságokkal: $x, y, z \in X$ esetén

1) $d(x, y) = d(y, x)$
2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
3) $d(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$.

A $d(x, y) = |x - y|$ távolságfogalmat szokták a leggyakrabban használni. Ez az ún. euklideszi távolság. Most definiáljuk a *félnorma* és a *norma* fogalmát, a norma függvény $\|.\|: X \to [0, \infty)$, és $x, y \in X$ esetén a félnorma tulajdonságai:

1) $\|x\| \geq 0$
2) $\|tx\| = |t|\|x\| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

valamint a félnormát normának nevezzük, ha még teljesül

4) $\|x\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$

is.

Az $\|.\|$ félnorma az X-en indukál egy „féltávolságot", a $d(x, y) = \|x - y\|$ képlettel. Ez egy ún. *féltávolság* abban az értelemben, hogy a távolság 3)-as tulajdonságát csak „félig" teljesíti.

Legyen $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmaz és $L^1(E)$ legyen az E-n Lebesgue-integrálható függvények halmaza. Definiáljunk egy félnormát ($\|.\|_1$) az $L^1(E)$ téren és nevezzük L^1-normának: $\|f\|_1 = (L) \int_E |f|$.

Ez indukál egy féltávolságot: $d_1(f, g) = \int_E |f - g|$. Mivel $\|f\|_1 = 0$ akkor és csak akkor, ha $f = 0$ majdnem mindenütt az E-n, ezért az $\|.\|_1$ nem lesz norma, és d_1 sem lesz távolság. Azonban, ha azonosítjuk azokat a függvényeket, amelyek majdnem mindenütt megegyeznek, akkor már $\|.\|_1$ norma lesz, és d_1 pedig távolság.

Legyen d egy féltávolság az X-en. Az $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset$ X sorozat konvergál az $x \in X$-hez, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $d(x, x_k) < \varepsilon$, ha $k \geq N$. Az $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozatot Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N \in \mathbb{N}$, amire minden $j, k \geq N$

esetén $d(x_j, x_k) < \varepsilon$. A háromszög-egyenlőtlenség miatt minden konvergens sorozat egyben Cauchy-sorozat is. Egy „félmetrikus” teret teljesnek nevezünk, ha minden Cauchy-sorozat konvergál egy X-beli számhoz. A teljesség egy nagyon fontos tulajdonság, hiszen így elég megmutatni, hogy egy sorozat Cauchy, és abból már következik, hogy konvergens is.

F. Riesz (1880-1956) és E. Fischer (1875-1954) megállapították, hogy az $L^1(E)$ tér teljes a d_1 féltávolsággal.

Tétel 4.2.1: Legyen E egy Lebesgue-mérhető halmaz, és legyen $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ egy Cauchy-sorozat az $(L^1(E), d_1)$-ben. Ekkor létezik egy $f \in L^1(E)$ függvény úgy, hogy az $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat konvergál f-hez d_1 szerint.

Ezzel ellentétben megmutatjuk, hogy a Riemann-integrálható függvények tere nem teljes. Legyen $R([a,b])$ az $[a,b]$-n Riemann-integrálható függvények tere.

Példa 4.2.2: Definiáljuk az $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ -t a következőképpen:

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{k} \\ x^{-1/2}, & \frac{1}{k} \le x \le 1. \end{cases}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ Cauchy-sorozat az $R([0,1], d_1)$ téren. Azonban nem konvergál egy $R[0,1]$-beli függvényhez sem. Tegyük fel ehhez indirekt, hogy egyenletesen konvergál egy f-hez a d_1 szerint. A 4.3.1-es tétel miatt az $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergál d_1 szerint egy $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényhez, ami

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^{-1/2}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Így persze $f = g$ majdnem mindenütt a $[0,1]$-en. Ez az f nem Riemann-integrálható, hiszen nem korlátos a $[0,1]$-en.

Most belátjuk, hogy a Henstock-Kurzweil integrálható függvények tere sem teljes.

Itt nem használható az előbb definiált L^1-norma, mert például a 4.1.2-es példában szereplő f' Henstock-Kurzweil-integrálható, de $|f'|$ már nem. Azonban értelmezhető itt is félnorma a következőképpen:

Definíció 4.2.3: Legyen $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ és legyen $HK(I)$ az *I*-n Henstock-Kurzweil-integrálható függvények tere. Ha $f \in HK(I)$, akkor *f Alexiewicz-féle félnormája* a következő:

$$\|f\| = \sup\left\{\left|\int_a^x f\right| : a \leq x \leq b\right\}.$$

Ugyanúgy, mint a Lebesgue-integrálnál, ha egyenlőeknek tekintjük azokat a függvényeket, amelyek Lebesgue-m.m. megegyeznek, akkor az előbb értelmezett Alexiewitz-féle félnorma norma lesz a $HK(I)$ téren.

Most megmutatjuk, hogy a $HK(I)$ tér nem teljes az Alexiewitz-féle félnormával. Ehhez azonban szükségünk lesz a Weierstrass-féle approximációs tételre, amelyet ezért előbb kimondunk.

Tétel 4.2.4: Ha *f* egy folytonos függvény az $[a, b]$-n, akkor létezik olyan $P_n(x)$ polinomokból álló sorozat, amely egyenletesen tart *f*-hez az $[a, b]$-n.

Példa 4.2.5: Legyen p: $[0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos és sehol sem differenciálható úgy, hogy $p(0) = 0$. Az előző tétel alapján létezik egy $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ polinomokból álló sorozat, amely egyenletesen konvergál a p-hez úgy, hogy $p_k(0) = 0$ minden k-ra. Az integrálszámítás alaptételének első része alapján $p_k(t) = \int_0^t p_k'$ minden $t \in [0,1]$ esetén. Ezért

$$\|p_k' - p_j'\| = \sup\left\{\left|\int_a^t (p_k' - p_j')\right| : \ a \leq t \leq b\right\} = \sup\{|(p_k - p_j)(t)| : \ a \leq t \leq b\}.$$

Mivel $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ egyenletesen konvergál p-hez, ezért $\{p_k'\}_{k=1}^{\infty}$ egy Cauchy-sorozat a $HK([0,1])$ térben az Alexiewitz-féle félnormával.

Tegyük fel, hogy létezik egy $f \in HK([0,1])$ függvény úgy, hogy $\|p_k' - f\| \to 0$, ha $k \to \infty$. Ekkor $p_k(t) = \int_0^t p_k' \to \int_0^t f$ egyenletesen a $[0,1]$ intervallumon. Így tehát $p(t) = \int_0^t f$. Az integrálszámítás alaptételének második része miatt p differenciálható m.m. (a deriváltja *f*), ami ellentmond p definíciójának.

Ez a példa mutatta meg nekünk, hogy a Henstock-Kurzweil-integrálható függvények tere nem teljes.

4.3 KONVERGENCIATÉTELEK

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett cserélhető fel az integrálás és a határértékképzés művelete. Azaz, adott egy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ integrálható függvényekből álló sorozat, amely valamilyen értelemben, mondjuk pontonként tart egy f limeszfüggvényhez, és a kérdés az, hogy vajon igaz-e, hogy $\lim_k \int_a^b f_k = \int_a^b \lim_k f_k$.

Először megnézzük, hogy a Riemann-integrálás körében milyen elégséges feltétel mellett érvényesül a fenti egyenlőség.

Tétel 4.3.1: Legyen $f, f_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Tegyük fel, hogy minden f_k Riemann-integrálható és az $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat egyenletesen konvergál az f-hez az $[a,b]$-n. Ekkor f is Riemann-integrálható a teljes $[a,b]$-n, és

$$\lim_{k\to\infty} (R)\int_a^b f_k = (R)\int_a^b f = (R)\int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k.$$

Az egyenletes konvergencia feltétele eléggé erős, és ezért azt várnánk, hogy lehet helyettesíteni valami gyengébbel, mondjuk pontonkénti konvergenciával. Erre ellenpélda a következő.

Példa 4.3.2: Definiáljuk az $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sorozatot a következőképpen, $f_k(x) = k\chi_{\left(0,\frac{1}{k}\right]}(x)$. Ekkor az $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat pontonként tart a 0-hoz, de $(R)\int_0^1 f_k = 1$ minden k-ra, ezért nem igaz a 4.3.1. Tétel konklúziója.

A Lebesgue-integrálhatóság körében háromfajta konvergencitétellel ismerkedünk meg, és ezek mindegyikéhez gyengébb feltételek szükségesek, mint a Riemann-integrál esetében. Az első tételünk a Monoton Konvergencia tétele.

Tétel 4.3.3. (A Monoton Konvergencia Tétele): Legyen $E \in M$ (M-et a 2.2.2 definícióban értelmeztük) és legyen $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ egy nemnegatív, E-n értelmezett, mérhető függvényekből álló növekvő sorozat. Legyen még $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Ekkor

$$(L)\int_E f = \lim_{k\to\infty} (L)\int_E f_k.$$

Ennek egy sokszor használható egyszerű következménye az alábbi. Legyen ismét $E \in M$ és $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ egy nemnegatív, E-n értelmezett mérhető függvényekből álló sorozat. Ekkor

$$(L)\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} (L)\int_E f_k.$$

Ezek után nézzük a Dominált-, és a Korlátos Konvergencia Tételeit. Az első bizonyításához szükségünk lesz a Fatou-lemmára és annak két következményére.

Lemma 4.3.4. (Fatou-lemma): Tegyük fel, hogy $E \in M$ és $f_k: E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ nemnegatív, mérhető függvények minden k-ra. Ekkor

$$(L)\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty}(L)\int_E f_k.$$

Bizonyítás: Legyen $h_k(x) = \inf_{j\geq k} f_j(x)$, ezért h_k nemnegatív és mérhető, valamint $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ növekvően tart $\liminf_{k\to\infty} f_k$-hoz. A Monoton Konvergencia Tétele miatt $(L)\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty}(L)\int_E h_k$. Mivel $h_k \leq f_k$ minden $x \in E$ esetén, ezért $\lim_{k\to\infty}(L)\int_E h_k \leq \liminf_{k\to\infty}(L)\int_E f_k$, amivel a bizonyítás teljes. □

Következmény 4.3.5: Tegyük fel, hogy $E \in M$ és $f_k, g: E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mérhetőek és $g \leq f_k$ minden k-ra. Ha a g Lebesgue-integrálható az E-n, akkor

$$(L)\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty}(L)\int_E f_k.$$

Következmény 4.3.6: Tegyük fel, hogy $E \in M$ és $f_k, g: E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mérhetőek és $f_k \leq g$ minden k-ra. Ha g Lebesgue-integrálható az E-n, akkor

$$(L)\int_E \limsup_{k\to\infty} f_k \geq \limsup_{k\to\infty}(L)\int_E f_k.$$

Ezek után már be tudjuk bizonyítani a Dominált Konvergencia Tételét.

Tétel 4.3.7. (A Dominált Konvergencia Tétele): Legyen $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ egy E mérhető halmazon értelmezett mérhető függvényekből álló sorozat. Tegyük fel, hogy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ pontonként tart f-hez Lebesgue-m.m. és létezik egy olyan Lebesgue-integrálható g függvény, amelyre $|f_k(x)| \leq g(x)$ minden k-ra, és Lebesgue-m.m. $x \in E$-re. Ekkor f Lebesgue-integrálható és $(L)\int_E f = \lim_{k\to\infty}(L)\int_E f_k$, valamint $\lim_{k\to\infty}(L)\int_E |f - f_k| = 0$.

Bizonyítás: A feltevés miatt $-g \leq f_k \leq g$ m.m., és így alkalmazható a 4.3.5 és a 4.3.6 következmény. Mivel $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ pontonként tart f-hez m.m., ezért

$$\limsup_{k\to\infty}(L)\int_E f_k \leq (L)\int_E \limsup_{k\to\infty} f_k = (L)\int_E f = (L)\int_E \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty}(L)\int_E f_k.$$

Tehát $(L)\int_E f = \lim (L)\int_E f_k$. A bizonyítás befejezéséhez figyeljük meg, hogy $|f - f_k|$ pontonként tart a 0-hoz m.m. és $|f(x) - f_k(x)| \leq 2g(x)$ minden k-ra és m.m. x-re. Így a tétel első része alapján $\lim (L)\int_E |f - f_k| = 0$. □

Hogyha az E halmaz mértéke véges, akkor a konstans függvények Lebesgue-integrálhatóak az E-n. Ennek segítségével kaphatjuk a Korlátos Konvergencia Tételét az előző tételből.

Tétel 4.3.8. (A Korlátos Konvergencia Tétele): Legyen $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ egy mérhető függvényekből álló sorozat a véges mértékű E halmazon. Tegyük fel, hogy létezik egy K szám úgy, hogy $|f_k(x)| \leq K$ minden k-ra és m.m. $x \in E$-re. Ha $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ m.m., akkor

$$(L)\int_E f = \lim_{k\to\infty}(L)\int_E f_k.$$

A Henstock-Kurzweil-integrálható függvények esetében sem lehet az előbbiekben látott egyszerű feltételek mellett kimondani a konvergenciatételeket, mert például a 4.3.2-es példa egy az egyben elmondható Henstock-Kurzweil-integrálható függvényekkel. Vagy egy másik példa, ahol nem korlátos intervallumon vannak értelmezve a függvények, az alábbi.

Példa 4.3.9: Legyen $f_k: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ és $f_k(x) = \chi_{(k,k+1)}(x)$. Ez pontonként konvergál a 0-hoz, de minden f_k-nak a Henstock-Kurzweil-integrálja 1. Tehát nem lehet megcserélni a limeszt az integrállal.

Ez a példa egyébként a Lebesgue-integrál esetére is ellenpélda.

Tehát itt is legalább annyit fel kell tenni, mint a Riemann-integrálnál, sőt még ez sem elég, mint ahogy a következő példa mutatja.

Példa 4.3.10: Definiáljuk az $f_k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket a következőképpen: $f_k(x) = \frac{1}{2k}\chi_{(-k,k)}(x)$. Minden f_k Henstock-Kurzweil-integrálható és integrálja 1. Azonban az $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$

sorozat egyenletesen konvergál egy f-hez, ami az $\mathbb{R}$-en azonoson 0. Azaz nem teljesül a felcserélhetőség.

A Henstock-Kurzweil-integrál esetében is ki fogjuk mondani a 3-féle konvergenciatételt, csak erősebb feltevésekkel élünk, mint a Lebesgue-integrál esetében.

Ezek után nézzük a Monoton Konvergencia Tételét Henstock-Kurzweil integrálható függvényekre.

Tétel 4.3.11. (A Monoton Konvergencia Tétele): Legyen $f, f_k: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil-integrálhatóak az I-n és tegyük fel, hogy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ monoton növően tart az f-hez az I-n. Ekkor f pontosan akkor Henstock-Kurzweil-integrálható az I-n, ha $\sup_k (HK) \int_I f_k < \infty$.

Ebben az esetben

$$(HK) \int_I f = (HK) \int_I \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} (HK) \int_I f_k \,.$$

Ezt a tételt elmondhatjuk monoton csökkenő $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ esetében is azzal a különbséggel, hogy itt $\inf_k (HK) \int_I f_k > -\infty$ lesz a feltétel. Bebizonyítható, hogy a Monton Konvergencia tételének feltételei mellett $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ létezik és véges majdnem minden $x \in I$ esetén.

A következő célunk kimondani a Dominált Konvergencia Tételét a Henstock-Kurzweil-integrál esetére. Ennek belátásához szükségünk volt a Fatou-lemmára. Itt is (a Henstock-Kurzweil-integrálra vonatkozó) Fatou-lemmára támaszkodik a bizonyítás. A lemmához azonban szükségünk van még egy állításra.

Lemma 4.3.12: Legyen $f_k, \alpha: I \subset \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil-integrálható minden k-ra, valamint tegyük fel, hogy $\alpha \leq f_k$ az I-n minden k-ra. Ekkor $\inf_k f_k$ Henstock-Kurzweil-integrálható az egész I-n.

Bizonyítás: Mivel $\alpha \leq f_k$, ezért tetszőleges k esetén $g_k = \inf_{1\leq j\leq k} f_j$ Henstock-Kurzweil-integrálható az egész I-n. Ez egyszerűen levezethető a Henstock-Kurzweil-integrál tulajdonságaiból. Mivel $\alpha \leq g_k$ minden k-ra, ezért $\inf_k (HK) \int_I g_k \geq (HK) \int_I \alpha > -\infty$. Ezért alkalmazható a Monoton Konvergencia Tétele az utána tett megjegyzés miatt a monoton csökkenő $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozatra, ami konvergál az $\inf_k f_k$-hoz. □

Megjegyezzük, hogy mivel $\alpha \leq \inf_k f_k \leq f_1$, ezért $\inf_k f_k$ véges értékű az egész I-n. Mostmár bizonyítani tudjuk a Henstock-Kurzweil-integrálra vonatkozó Fatou-lemmát.

Lemma 4.3.13. (Fatou-lemma): Legyen $f_k, \alpha: I \subset \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil-integrálható minden k-ra, és tegyük fel, hogy $\alpha \leq f_k$ az egész I-n és $\liminf_{k\to\infty} (HK) \int_I f_k < \infty$. Ekkor $\liminf_{k\to\infty} f_k$ véges majdnem mindenütt az I-n, és a következő f függvény Henstock-Kurzweil-integrálható az egész I-n:

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \inf f_k(x), & \text{ha a limesz inferior véges} \\ 0, & egyébként, \end{cases}$$

valamint teljesül, hogy $(HK) \int_I f \leq \liminf_{k\to\infty} (HK) \int_I f_k$.

Bizonyítás: Legyen a φ_k függvény definiálva a következőképpen $\varphi_k(x) = \inf\{f_j(x): j \geq k\}$. Ez az előző lemma miatt minden $k \in \mathbb{N}$ esetén Henstock-Kurzweil-integrálható az egész I-n. Mivel $\alpha \leq \varphi_k \leq f_k$ az I-n minden k esetében, ezért minden φ_k véges értékű az I-n, és

$$(HK) \int_I \alpha \leq (HK) \int_I \varphi_k \leq (HK) \int_I f_k,$$

ami maga után vonja, hogy (*) $(HK) \int_I \alpha \leq \liminf_{k\to\infty} (HK) \int_I \varphi_k \leq \liminf_{k\to\infty} (HK) \int_I f_k$. Továbbá, a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat monoton növekedő és a Henstock-Kurzweil-integrálra vonatkozó Monoton Konvergencia tétel utáni megjegyzés alapján pontonként konvergál egy f függvényhez Lebesgue-m.m. az I-n. Mivel $\left\{\int_I \varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ monoton, ezért a (*) egyenlőtlenséglánc miatt $\left\{\int_I \varphi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ konvergens és emiatt korlátos is. Ezekből a Monoton Konvergencia Tétele miatt *f* Henstock-Kurzweil-integrálható és szintén a második egyenlőtlenséglánc miatt

$$(HK) \int_I f = \lim_{k\to\infty} (HK) \int_I \varphi_k = \liminf_{k\to\infty} (HK) \int_I \varphi_k \leq \liminf_{k\to\infty} (HK) \int_I f_k.$$

Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. □

Mint a Lebesgue-integrál esetében, itt is elmondható az alábbi következmény.

Következmény 4.3.14: Legyen $f_k, \beta : I \subset \mathrm{R}^* \to \mathrm{R}$ Henstock-Kurzweil-integrálható minden k esetén, és tegyük fel, hogy $f_k \leq \beta$ az I-n, valamint $\limsup_{k\to\infty} (HK) \int_I f_k > -\infty$. Ekkor $\limsup_{k\to\infty} f_k$ véges majdnem mindenütt az I-n, és tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} \limsup\limits_{k\to\infty} f_k(x), & \text{ha a limesz szuperior véges} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvényt. Ez Henstock-Kurzweil-integrálható az egész I-n, és

$$(HK)\int_I f \geq \limsup_{k\to\infty}(HK)\int_I f_k.$$

Most már be tudjuk bizonyítani a Dominált Konvergencia Tételét a Henstock-Kurzweil-integrálható függvények körében.

Tétel 4.3.15. (A Dominált Konvergencia Tétele): Legyen $f_k: I \subset \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil-integrálható az egész I-n, és tegyük fel, hogy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ pontonként konvergens majdnem minden I-beli pontban. Definiáljuk f-et az

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x), & \text{ha a limesz véges} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

képlettel. Legyenek $\alpha, \beta: I \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil-integrálható függvények úgy, hogy $\alpha \leq f_k \leq \beta$ majdnem mindenütt az I-n, minden $k \in \mathbb{N}$ esetében. Ekkor f Henstock-Kurzweil-integrálható az I-n és fennáll

$$(HK)\int_I f = (HK)\int_I \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty}(HK)\int_I f_k.$$

Bizonyítás: Legyen $E_k = \{x \in I: f_k(x) < \alpha(x) \text{ vagy } f_k(x) > \beta(x)\}$. Ekkor az

$$E = \left\{x \in I: \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ divergens}\right\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

halmaz mértéke 0. Ha $x \notin E$, akkor $f_k(x) \to f(x)$ és $\alpha(x) \leq f_k(x) \leq \beta(x)$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Tudjuk, hogy $(HK)\int_I f_k = (HK)\int_{I\setminus E} f_k$, $(HK)\int_E f = 0$ és ezért fennáll minden $x \in I$-re a feltevésünk. Mivel $\alpha \leq f_k$, ezért a Fatou-lemma miatt $\liminf_{k\to\infty} f_k$ véges értékű majdnem mindenütt az I-n, és teljesül, hogy $(HK)\int_I f \leq \liminf_{k\to\infty}(HK)\int_I f_k$. Hasonlóan, mivel $f_k \leq \beta$, ezért a 4.3.14.-es következmény miatt $\limsup_{k\to\infty} f_k$ véges majdnem mindenütt az I-n és teljesül, hogy

$$(HK)\int_I f \geq \limsup_{k\to\infty}(HK)\int_I f_k.$$

Összeolvasva ezeket az eredményeket azt kapjuk, hogy

$$\limsup_{k\to\infty}(HK)\int_I f_k \le (HK)\int_I f \le \liminf_{k\to\infty}(HK)\int_I f_k \le \limsup_{k\to\infty}(HK)\int_I f_k,$$

vagyis $(HK)\int_I f = \lim_{k\to\infty}(HK)\int_I f_k$. □

Most alkalmazzuk a Dominált Konvergencia Tételét az $|f_k| \le g$ feltétellel, ahol f_k és g is legyen Henstock-Kurzweil-integrálható. Ekkor nyilván ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy $-g \le f_k \le g$, és mivel g nemnegatív, ezért abszolút integrálható is, és f_k is abszolút integrálható. Így elmondhatjuk a következő tételt.

Tétel 4.3.16. (A Korlátos Konvergencia Tétele): Legyen $f_k : I \subset \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil-integrálható az egész korlátos I-n és tegyük fel, hogy $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ pontonként konvergens az I majdnem minden pontjában. Definiáljuk f-et a következő képlettel:

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x), & \text{ha a limesz véges} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha létezik egy K szám úgy, hogy $|f_k(x)| \le K$ minden k-ra és minden $x \in I$-re. Ekkor

$$(HK)\int_I f = \lim_{k\to\infty}(HK)\int_I f_k.$$

A bizonyításhoz csak azt kell meggondolni, hogy a $g(x) = K \ \forall x \in I$ függvény Henstock-Kurzweil-integrálható az egész I-n.

5. FEJEZET

5.1 ÖSSZEHASONLÍTÁS

Ebben a részben a különböző integrálfogalmak közötti kapcsolatot vizsgáljuk, azaz, hogy a Riemann-, a Lebesgue-, a Henstock-Kurzweil- és a McShane-integrálok közül melyik ekvivalens valamelyik másikkal, vagy éppen milyen tartalmazási reláció áll fenn két integrál között.

Ezen kapcsolatok közül néhányat már meg is említettünk, illetve néhány az említett állításokból és példákból nyilvánvaló.

I.) Egy egyszerű példából látható, hogy a Riemann-integrálható függvények osztálya „kevesebb” függvényt tartalmaz, mint a Lebesgue-integrálható függvények osztálya. Példának tekintsük az ún. Dirichlet-függvényt, amely az az $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, melyre

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racionális szám} \\ 0, & x \text{ irracionális szám.} \end{cases}$$

Legyen $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ egy felbontása a $[0,1]$ intervallumnak. Minden $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallumban legyen egy r_i racionális szám és egy q_i irracionális szám. Ilyen felbontást nyilván lehet konstruálni. Ekkor

$$I_P\big(f,(r_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} f(r_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$$

míg

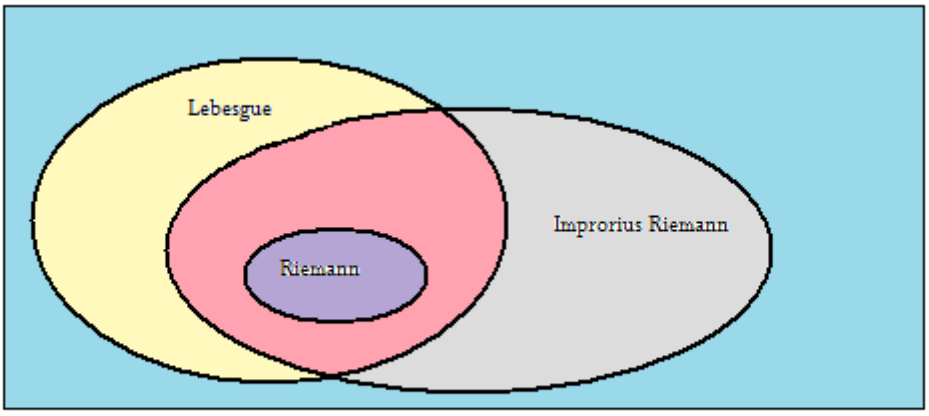
$$I_P\big(f,(q_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} f(q_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 1.$$

Indirekten tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható és az integrálja A. Legyen $\varepsilon < \frac{1}{2}$ rögzített, és válasszunk hozzá egy megfelelő δ-t. Ha P olyan felbontás, hogy minden részintervallumának mértéke kisebb δ-nál, akkor $1 = \left|I_P\big(f,(q_i)\big) - I_P(f,(r_i))\right| \leq \left|I_P\big(f,(q_i)\big) - A\right| + |A - I_P(f,(r_i))| < \varepsilon + \varepsilon < 1$, ami ellentmondás, tehát f nem Riemann-integrálható.

Most megmutatjuk, hogy ezzel szemben a Dirichlet-függvény Lebesgue-integrálható. Könnyű látni, hogy a racionális számok halmaza Lebegue-0-mértékű, tehát a Dirichlet-függvény Lebesgue-m.m. megegyezik az azonosan 0 függvénnyel, ami pedig integrálható, és az integrálja 0.

Tehát megállapíthatjuk, hogy a Riemann-integrálható függvények tere része a Lebesgue-integrálható függvények terének. A Lebesgue-integrál tehát egyfajta kiterjesztése, azaz bővebb nála.

Ezt az összefüggést ábrázoljuk, belevéve improprius Riemann-integrált is, amiről csak a bevezetőben volt szó. Megmutatható, hogy létezik olyan függvény, amely improprius Riemann-integrálható, de nem Lebesgue-integrálható.



Ábra 5.1.1

II.) Könnyen látható, hogy minden Riemann-integrálható függvény Henstock-Kurzweil-integrálható, hiszen elegendő a gauge-ot olyannak választani, hogy az intervallumainak hossza mindig ugyanaz a konstans legyen. Viszont például a Dirichlet-függvény Henstock-Kurzweil-integrálható, de az előbb láttuk, hogy nem Riemann-integrálható. Ennek a pontnak a végén már rögtön fogjuk látni, hogy a Dirichlet-függvény miért Henstock-Kurzweil-integrálható. Ehhez előbb hasonlítsuk össze a Lebesgue-integrált a Henstock-Kurzweil-integrállal. A Lebesgue-integrál egyben abszolút integrál is, azaz egy függvény pontosan akkor Lebesgue-integrálható, ha az abszolút értéke is az. Ebből is láthatjuk, hogy a Henstock-Kurzweil-integrál általánosabb fogalom. Most nézzük, hogy milyen feltételek mellett egyeznek meg mégis.

Tétel 5.1.2: Tegyük fel, hogy $f: I \to \mathbb{R}$ nemnegatív és mérhető függvény. Ekkor f Lebesgue-integrálható pontosan akkor, ha f Henstock-Kurzweil-integrálható. És ebben az esetben $(L)\int_I f = (HK)\int_I f$.

Bizonyítás: Első esetként tegyük fel, hogy f korlátos is, és a korlátja M, valamint legyen $I = [a, b]$ egy korlátos intervallum. Ekkor a Lebesgue-integrál értelmezésénél láttuk, hogy van $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ lépcsősfüggvényekből álló sorozat, amelyre $\varphi_k \to f$ pontonként m.m. és $|\varphi_k(x)| \leq M$ minden $k \in \mathbb{N}$ és $x \in [a, b]$ esetén. Mivel φ_k egy lépcsősfüggvény, ezért $(L)\int_a^b \varphi_k = (HK)\int_a^b \varphi_k$. Alkalmazható a Korlátos Konvergencia tétele (amely mindkét integrálra fennáll), ezért azt kapjuk, hogy $(L)\int_a^b f = (HK)\int_a^b f$.

Most tegyük fel, hogy f egy tetszőleges nemnegatív, mérhető, valós értékű függvény, amely értelmezve van egy tetszőleges $\mathbb{R}$-beli intervallumon. Definiáljuk az $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozatot az $f_k(x) = \min\{f(x), k\}\chi_{[-k,k]}(x)$ képlettel. Minden f_k nemnegatív, mérhető

és korlátos, szóval az első eset miatt $(L)\int_{-k}^{k} f_k = (HK)\int_{-k}^{k} f_k$. Mivel $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ pontonként monoton növően tart az f-hez, ezért használni tudjuk a Monoton Konvergencia tételét, amely szintén minden integrálra igaz, és ebből azt kapjuk, hogy f akkor és csak akkor Lebesgue-integrálható, ha Henstock-Kurzweil-integrálható. Amikor valamelyik integrál véges, akkor fennállnak a következő egyenlőségek. $(L)\int_I f = \lim_{k\to\infty}(L)\int_I f_k = \lim_{k\to\infty}(L)\int_{-k}^{k} f_k = \lim_{k\to\infty}(HK)\int_{-k}^{k} f_k = \lim_{k\to\infty}(HK)\int_I f_k = (HK)\int_I f_k$. □

Következmény 5.1.3: Tegyük fel, hogy $f: I \to \mathbb{R}$ mérhető. Ekkor f Lebesgue-integrálható pontosan akkor, ha f abszolút Henstock-Kurzweil-integrálható, és ebben az esetben a két integrál megegyezik.

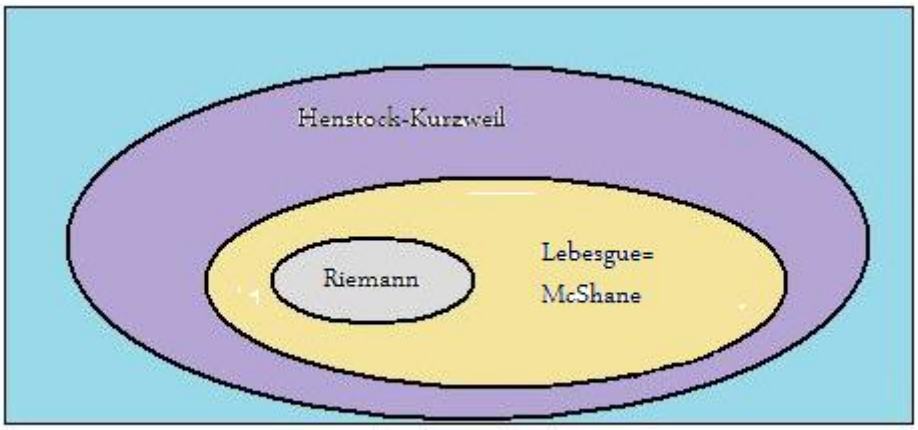
III.) Tegyük fel, hogy $f: I \subset \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ McShane-integrálható az I-n. Következésképpen $|f|$ is McShane-integrálható, tehát f és $|f|$ is Henstock-Kurzweil-integrálható, azaz f abszolút Henstock-Kurzweil-integrálható az I-n. Másrészről vannak olyan Henstock-Kurzweil-integrálható függvények, amelyek nem McShane-integrálhatóak. A következő tételeket bizonyítás nélkül közöljük.

Tétel 5.1.4: Legyen $f: I \to \mathbb{R}$. Ekkor f McShane-integrálható akkor és csak akkor, ha f abszolút Henstock-Kurzweil-integrálható.

Ebből és a II.)-es pontban említett tényből, miszerint a Lebesgue-integrál abszolút integrál már következik a

Tétel 5.1.5: Legyen $f: I \to \mathbb{R}$. Ekkor f McShane-integrálható pontosan akkor, ha f Lebesgue-integrálható és a két integrál megegyezik.

Ábrázoljuk ezeket az észrevételeket:



Ábra 5.1.6

5.2 UTÓSZÓ

Ebben a részben szeretném összevetni mindazt, amit az előző fejezetek során megkaptam. Megpróbálok választ találni arra, hogy vajon melyik integrál a jó, vagy jobb, illetve hogy melyiket célszerű használni a gyakorlatban.

Az 5.1-es részben látottak alapján azt mondhatnánk, hogy a Henstock-Kurzweil-integrál az a fogalom, amelyikkel a legtöbb függvényt tudjuk integrálni, tehát felejtsük el az összes többit, elég nekünk ez az egy. De, hogy ne mondhassunk ilyet, ezért foglalkoztunk a 4. fejezetben az integrálszámítás során hasznos és nagyon fontos tulajdonságokkal. Ugyanis láthatjuk, hogyha például konvergenciatételeket szeretnénk használni, akkor a Lebesgue-integrál sokkal megfelelőbb fogalom a számunkra, hiszen sokkal kevesebbet kell feltenni a tétel igazságához. Ez a fejtegetés mutatja, hogy nincs napjainkban olyan integrálfogalom, amely minden tekintetben úgymond a legjobb lenne.

Ezért tehát, hogyha olyan feladattal állunk szemben, ahol Newton-Leibniz formulát szükséges alkalmazni, akkor Henstock-Kurzweil-integrált célszerű használnunk. Ha viszont például valamelyik konvergenciatételre volna szükség, akkor alkalmazzunk Lebesgue-integrált. Abban az esetben is célszerű Lebesgue-integrált tekinteni, ha éppen az integrálható függvények terével dolgozunk, hiszen az Lebesgue-integrál esetében teljes, míg a többi integrálelmélettel nem teljes tér lesz. Viszont ha csak egyszerűen egy integrál értékét szeretnénk meghatározni, akkor a legjobban használható (talán a közérthetősége és egyszerűsége miatt) a Riemann-integrál.

Most röviden kitérünk arra, hogy a különböző tudományterületeken milyen integrálelméletet alkalmaznak többnyire az ott tevékenykedők.

A valószínűségszámításban és a rá épülő területeken, például a statisztikában különböző mértékek (ún. valószínűségi mértékek) szerint integrálnak, vagy éppen valamilyen eloszlás szerint. Ez a fajta integrálás természetesen Lebesgue-integráláshoz hasonlít, csak nem Lebegue-mérték szerint történik az integrálás, hanem pl. eloszlásoknál Lebesgue-Stieltjes-mérték szerint.

A funkcionálanalízisben például az integrálható függvények terére van sok helyen szükség, ezért ott természetesen a Lebesgue-integrálható függvények terének többféle változatával foglalkoznak a teljesség miatt.

A fizikában sok helyen (hőtan, áramlástan) a komplex értelemben vett integrálást használják, amelynek kiszámítása a Riemann-integrálásra vezetődik vissza.

Ennél persze lényegesen több területen alkalmaznak integrálszámítást, de az általánosan elmondható, hogy ahol az integrálok gyakorlati kiszámítása a fontos, ott általában Riemann-integrált használnak, ahol pedig az integrálás valamilyen elméleti tulajdonságát használják, ott a Lebesgue-integrálás kerül előtérbe. A másik két integrálfogalmat azért használják nagyon kevesen, mert nehezebb azokkal kiszámítani egy konkrét értéket, vagy mert éppen nem rendelkeznek olyan jó tulajdonságokkal, mint a Lebesgue-integrál.

IRODALOM

[1.] Douglas S Kurtz, Charles W Swartz: Theories of integration (The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and McShane) 2004, World Stientific

[2.] V. I. Bogachev: Measure Theory, Springer, 2006

NYILATKOZAT

Név: Lettner Tímea

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika BsC

ETR azonosító: LETPAAT.ELTE

Szakdolgozat címe: Az integrálelmélet fejlődése Riemann óta

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2010. május 28.

a hallgató aláírása