EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKAI PARADOXONOK

BSc MATEMATIKA SZAKDOLGOZAT

TANÁRI SZAKIRÁNY

Készítette:

Hajnal Anna

Témavezető:

Korándi József

BUDAPEST, 2015

Tartalomjegyzék

TARTALOMJEGYZÉK **2**

BEVEZETŐ **3**

A PARADOXONOKRÓL 4

ZÉNÓN ÉS AKHILLEUSZ **4**

ELLENTMONDÁSOS PARADOXONOK **6**

EUBULIDÉSZ ÉS A HAZUG PARADOXON 6
CURRY PARADOXONJA 8
A RUSSEL PARADOXON 9

LÁTSZÓLAGOS PARADOXONOK **11**

A VÁRATLAN AKASZTÁS PARADOXONJA 11
JÁTÉK A VÉGTELENNEL 11
Végtelen szálloda és az okos portás *12*
Halmazok számossága *13*
MINDEN LÓ EGYSZÍNŰ 16
VALÓSZÍNŰSÉGI PARADOXONOK 16
Születésnapi paradoxon *17*
Ajándékozási paradoxon *17*
Monthy Hall paradoxon *18*
Bertrand-féle paradoxon *20*

BANACH-TARSKI PARADOXON **21**

KIVÁLASZTÁSI AXIÓMA 22
A PARADOXON BIZONYÍTÁSA 23

VÉGSZÓ **34**

FELHASZNÁLT IRODALOM **34**

Bevezető

„Ohó álljunk csak meg. Ön azt mondja, a rögeszmém, hogy őrült vagyok. De hiszen tényleg az vagyok, az imént mondta. De hiszen akkor ez nem rögeszme, akkor az egy logikus gondolat. Tehát nincs rögeszmém. Tehát mégse vagyok őrült. Tehát csak rögeszme, hogy őrült vagyok, tehát rögeszmém van, tehát őrült vagyok, tehát igazam van, tehát nem vagyok őrült. Mégiscsak gyönyörű dolog a tudomány!”[1]

Számos tudományban és a mindennapokban is jelen vannak a paradoxonok, bár nem mindenhol jelentik pontosan ugyanazt. Abban hasonlítanak, hogy olyan jelenségekre használják, amik látszólag vagy valóságosan ellentmondásosak, rácáfolnak a józanészre. Szakdolgozatom témájául a paradoxonokat választottam, mivel ez a témakör már gyerekkoromban is érdekelt. Egyik ilyen első kérdés, amivel találkoztam: mi történik, ha Pinokkió, akinek megnő az orra, amikor hazudik, azt mondja: „Most meg fog nőni az orrom”.

Később is bele-bele botlottam ilyen képtelen gondolatokba, például, hogy mi történne, ha valaki visszautazna az időben, és megölné a saját nagyapját, amikor ő még kisgyerek? Egy másik érdekes időutazási paradoxon, amikor feltesszük, hogy van egy időutazó gépünk, ami 3 perccel korábbra, egy adott helyre bármilyen tárgyat vissza tud vinni. Tegyük fel, hogy az asztal egyik sarkából a másikba utaztatok vissza egy könyvet. Három perccel azelőtt, hogy megnyomnám a gombot, a könyv a túloldalt meg is jelenik. Mi történne akkor, ha a három perc leteltével mégse nyomnám meg azt a gombot? Sokak által ismert kérdés az is, hogy mi fog győzni, ha a mindenen keresztültörő ágyúgolyót kilőjük a mindent megállító falra célozva?

A paradoxonok azon kívül, hogy érdekesek, rámutatnak annak a rendszernek az ellentmondásosságára, amiben léteznek. Képzeljük el egy világot, ahol minden egyszerre megtörténik, meg nem is. A matematikában egy állításból és annak a tagadásából minden tétel igazságát be lehet látni. Az indirekt bizonyítási módszer épp arra épül, hogy ha egy állítás nem igaz, akkor a tagadása igaz. Sokszor azáltal, hogy egy paradoxonra keresték a feloldást a matematikusok, tettek igazán nagy lépéseket előre a matematikában.

[1] Karinthy Frigyes

A dolgozatomban először definiálom a paradoxonokat, majd bemutatok pár érdekeset belőlük, köztük néhány olyat is, amik a matematika fejlődése szempontjából is nagy jelentőséggel bírnak. Először olyan klasszikus paradoxonokkal foglalkozom, mint például Zénón apóriái, illetve a hazug paradoxon. Ezután Russel anatómiáját vizsgálom meg, majd a végtelen néhány érdekes tulajdonságával foglalkozom. Utánuk pár valószínűségi paradoxon következik, természetesen a teljesség igénye nélkül. Végül kimondom és bizonyítom a Banach-Tarski paradoxon néven közismert tételt.

A paradoxonokról

A matematikában paradoxonnak olyan állításhalmazt hívunk, amely ellentmondást tartalmaz. Ez a halmaz állhat egyetlen állításból is, ami se igaz, se hamis nem lehet. A matematikai paradoxonokat két nagy csoportra lehet osztani, a valódi vagy ellentmondásos paradoxonokra és a látszólagos paradoxonokra. A második csoportba azok a paradoxonok tartoznak, amik elsőre ellentmondásnak tűnek a meglepő állításuk miatt, de valójában igazak. Valamint van pár olyan is, akiket egyik csoportba se lehet beosztani, ilyenek például Zénón apóriái.

Zénón és Akhilleusz

Zénón i. e. 5. században élt Görögországban, az ő paradoxonjait tartják az egyik legkorábbiaknak. Zénón mestere, Parmenidész munkásságának során azzal foglalkozott, hogy az úgynevezett „létezőt” vizsgálta. Ennek a létezőnek az ő elmélete alapján olyan tulajdonságai vannak például, mint hogy egész, nem keletkezett, ellentmondástalan, egyetlen, nem mozog. Zénón követte mestere tanítását és további érveket hozott fel Parmenidész elmélete mellett. A mozgás elleni néhány érve híresült el úgy, mint Zénón paradoxonjai, „aporiái”. Ezek az indirekt bizonyítás logikáját követik, mindegyik állítása előtt felteszi, hogy van mozgás, majd ellentmondáshoz jut, és mivel a létező ellentmondástalan, az eredeti feltevés nem lehetett igaz, tehát nem létezik mozgás. Érdekes, hogy ő az első olyan gondolkodó, akinél ez az indirekt logika megjelenik. Nézzünk néhányat ezek közül.

1. Dikhotomia

Tételezzük fel, hogy valaki *A* városból szeretne eljutni *B* városba. Ahhoz, hogy *B*-be elérjen, először el kell érnie az út feléhez, *F*-hez. De ahhoz, hogy *A*-ból *F*-be eljusson, szintén el kell jutnia először az *AF* távolság feléhez, *FF*-hez. Ezt a felezést végtelenszer meg lehetne tenni,

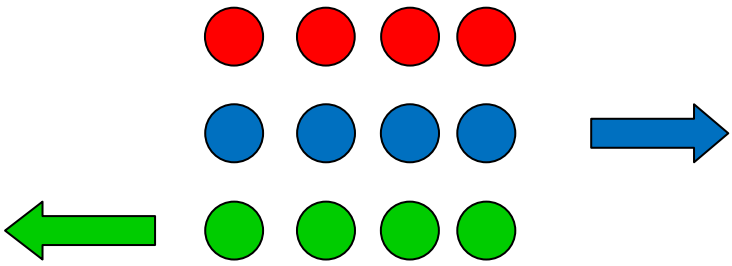
ami végtelen sok pontot jelent. Végtelen pontot pedig nem lehet bejárni véges időn belül, tehát nem lehet eljutni *A*-ból *B*-be. Mivel a gyakorlat mégis azt mutatja, hogy el lehet jutni *A*-ból *B*-be, ellentmondáshoz jutottunk, de a létező nem lehet ellentmondásos, tehát nem létezik mozgás.

2. Akhilleusz és a teknős

Hasonló gondolat alapján bizonyítja be, hogy Akhilleusz, a leggyorsabb görög, nem tud utolérni egy teknősbékát. Tegyük fel, hogy a verseny elején, Akhilleusz nagylelkű és nem ismervén Zénón gondolatmenetét, azt hiszi, hogy mindenképpen ő győzhet, ezért ad 100 méter előnyt a teknősnek. Miután a teknős ezt lefutotta nekiindul Akhilleusz, hogy utolérje. Ám mire lefutja a 100 métert, addigra a teknős már előrébb ment valamennyivel. És ugyanígy mire Akhilleusz odaér, ahol a teknős volt, mikor ő a 100 méter végére ért, kevesebbel ugyan, mint előbb, de megint előrébb lenne. És mivel ezt a végtelenségig lehetne folytatni, Akhilleusz nem nyerheti meg a versenyt. A gyakorlat itt is azt mutatja, hogy egy gyorsabb ember, hiába indul később, nem csak beéri, de le is előzi a lassabbat. Nem létezik tehát mozgás.

3. Sztadion

Tegyük fel, hogy 3 sorba rendezzük az emberek egy stadionban. Egy sorban vannak a piros sapkások, alattuk egy másikban a kékek és egy harmadikban a zöld sapkások állnak legalul. Tegyük fel, hogy a kéksapkások elindulnak jobbra egy állandó *v* sebességgel, a zöldek pedig balra, ugyanekkora sebességgel.



Amíg egy kék elhalad egy piros előtt, addig egy zöld is egy piros előtt halad el, viszont két kék előtt. Tehát az azonos gyorsasággal mozgó emberek, azonos idő alatt nem azonos utat tesznek meg, ami ellentmondás, nem létezhet sebesség és így mozgás se.

Az utolsó paradoxonnál látható legegyszerűbben, hogy nincs benne valójában ellentmondás, a sebesség relatív voltára mutat rá.

Az első két aporia gondolata nagyon hasonló, az elsőnél az utat osztja végtelen darabra, a másodiknál az időt, amik szerinte nem lehetnek egyenlők egy véges összeggel. Zénón korában még nem tudták, hogy egy végtelen hosszú összegnek is lehet véges összege. Így a Dikhotomiánál, ha a két város távolsága d, akkor a $d \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = d$. Ami egy véges távolság, tehát bejárható véges idő alatt. A végtelen ezeken kívül is sok paradox helyzetet okoz, amelyekről még a későbbiekben lesz szó.

Ellentmondásos paradoxonok

Ide tartoznak azok a paradoxonok, ahol az állításoknak bárhogy választjuk meg az igazságértékét, ellentmondáshoz jutunk. Ehhez bevezetőnek egy rövid példa, ami pár hónapja nagy népszerűségnek örvendett az interneten. A feladat így hangzik:

Mekkora a valószínűsége, hogy az alábbi lehetőségek közül, erre a kérdésre a helyes választ választom?

a.) 25%
b.) 50%
c.) 25%
d.) 65%

Sokan tévesen azt gondolják elsőre, hogy ez egy paradoxon, pedig nem. A fenti négy lehetőség közül egyik se jó, tehát annak a valószínűsége, hogy jót választok 0. Akkor miért szerepel mégis itt? Az állítást könnyen paradoxonná lehet tenni, ha a d.) lehetőséget kicseréljük 0%-ra vagy arra, hogy „Egyik sem jó”. Hiszen ebben az esetben nem tudunk jót választani, mivel a válaszok összefüggnek egymással, így épp azzal, hogy választunk egyet, egy másik lenne a jó megoldás.

Eubulidész és a hazug paradoxon

Eubulidész görög filozófust a paradoxonok atyjának szokták hívni több fennmaradt korai paradoxonja miatt. Az egyik tőle származó típus a „halom”, „sok” fogalmakkal van kapcsolatban. Arra épülnek, hogy nem ismerjük ezeknek a fogalmaknak a pontos határait. A paradoxon így szól: „Ha van egy halom babom, abból, ha elveszek egyet, attól még halom marad-e? A válasz igen. Ha még egyet? Igen. Tegyük fel, hogy ezt nagyon sokszor

végrehajtjuk, míg már csak két darab bab maradt. Abból, ha elveszek egyet az még egy halom bab-e? Nem. De miért, hiszen ugyanazt csináltam.” Ugyanerre példa, hogy ha egy hajszálat kitépek, attól kopasz leszek-e.

Egy másik a „szarvas érv”, ami azon alapul, hogy gyakran feltételezünk olyan dolgokat, amiket nem mondunk ki. Két férfi beszélget.

- Amit nem veszítettél el, az megvan neked.
- Igen.
- Szarvakat nem veszítettél el.
- Nem.
- Tehát vannak szarvaid.

Eubulidész legismertebb paradoxonja a hazug paradoxon, ami az olyan jellegű állításokat tartalmaz, mint az „Ez a mondat hamis.”. Nagy valószínűséggel a paradoxon eredete Epimenidész i. e. 6. századi krétai „Minden krétai hazudik” mondata volt. Ez az állítás így nem okoz ellentmondást, de levezethető belőle legalább egy igazmondó krétai létezése. A mondatot valódi paradoxonná tehetnénk, ha minden egyes krétait felkeresnénk és elmondanák ők is ezt a mondatot. A hazug paradoxon pár más variációja:

a). Most hazudok.

b). 1. A következő mondat hamis. 2. Az előző mondat igaz.

c). 1. Mind a három mondat hamis. 2. Mind a három mondat hamis. 3. Mind a három mondat hamis.

d). Egy hídon csak az mehet át, aki igazat mond, aki hazudik, őt felakasztják. Egy férfi ezt mondja: Most fel fognak akasztani.

Ugyanez a helyzet Prótagorasz jogásztanítványával, aki a tandíjat csak az első megnyert pere után fizetné ki. A tanítvány sokáig nem nyer pert, mivel a mesterséget nem űzi, így a mester bepereli. Hogy ítéljen a bíró, ki nyerheti meg a pert?

Ezekben a paradoxonokban a mondatok, történetek önmaguk igazságértékére hivatkoznak és így keletkeznek az ellentmondások.

Curry paradoxonja

Haskell Curry XX. századi matematikus egyik paradoxonja is az önmagára utaló állítások közé tartozik. A paradoxonnak egy példamondata: *Ha ez a mondat igaz, akkor sárkányok léteznek.* Vizsgáljuk meg, mi következik ebből az állításból. Tegyük fel, hogy ez a mondat igaz. Ha igaz, akkor sárkányok léteznek. De éppen ezt mondja a mondat, tehát az állítás igaz! Mivel az $A \rightarrow B$ típusú mondatok csak akkor hamisak, ha A igaz és B hamis, ezért ez alapján kell megvizsgálnunk a mondatot, ha hamis. Ekkor igaz lesz, hogy *ez a mondat igaz*, de hamis, hogy *sárkányok léteznek*. Ezzel ellentmondásra jutottunk, a mondat nem lehet hamis. (Az, hogy a mondat második fele mi, nem használtuk ki, tehát tetszőlegesen bármit be lehet ezzel bizonyítani.) Például, hogy jobban érthető legyen a gondolat, ezt is írhatnánk: *Ha ez a mondat igaz, akkor ez a mondat igaz*. Vagy, hogy ellentmondás hozzunk létre: *Ha ez a mondat igaz, akkor ez a mondat hamis*.

Curry paradoxonját a nullad rendű logika eszközeivel be lehet látni, amihez először tisztázok pár fogalmat és jelet.

Logikai operátorok: $\neg$ negáció, $\wedge$ konjukció, $\vee$ diszjunkció, $\rightarrow$ implikáció.

Ítéletváltozók: logikai változók, egy megszámolhatóan végtelen halmaz egyszerű állításai.

Ítéletlogikai formulák:elemei ítéletváltozók, ha A formula, akkor $\neg A$ is, ha A és B formula akkor $A \wedge B$ is, $A \vee B$ is, $A \rightarrow B$ is, és csak ezek.

Interpetáció: függvény, ami az ítéletváltozókhoz rendeli hozzá az igaz vagy hamis értéket.(I)

A **tautológia** (T), ha minden I-re A igaz.

A és B **tautológikusan ekvivalensek** ($A \sim^{\circ} B$) ha A igaz, akkor B is és ha B igaz, akkor A is.

Pár példa erre, amik közül a későbbiekben párat használok: $\neg\neg X \sim^{\circ} X$; $(X \vee X) \sim^{\circ} X$; $(X \rightarrow Y) \sim^{\circ} (\neg X \vee Y)$; $(X \vee \neg X) \sim^{\circ} T$.

Formalizáljuk az állítást: a mondat tetszőleges második fele legyen Y, magát az állítást pedig jelöljük X-szel. Mivel X önmagára utaló, ezért felírhatjuk ezt az egyenlőséget: $X \sim^{\circ} X \rightarrow Y$.

Ekkor: $X \sim^{\circ} X \vee X \sim^{\circ} X \vee (X \rightarrow Y) \sim^{\circ} X \vee \neg X \vee Y \sim^{\circ} T \vee Y \sim^{\circ} T$. Tehát beláttuk, hogy X mindig igaz.

A Russel paradoxon

A halmazelmélet a matematika egyik alapköve, a matematika nagyon sok más ágában is a fogalmakat halmazokkal definiálják. Ezért is volt megrázó, amikor többek között Bertrand Russel is rámutatott paradoxonjával a naiv halmazelmélet egy hibájára.

A paradoxon így hangzik:

Hívjuk *tartalmazkodónak* azon halmazokat, amik elemként tartalmazzák önmagukat. Ekkor, ha úgy definiálunk egy S halmazt, hogy azok és csak azok a halmazok elemei S-nek, amelyek nem tartalmazkodóak, akkor S tartalmazkodó lesz vagy nem?

Tehát $T \in S$-nek pontosan akkor, ha T nem eleme T-nek. Ha S nem tartalmazkodó, akkor S definíciója miatt S-et bele kell tennünk S-be, tehát S tartalmazkodó, ami ellentmondás. Akkor $S \in S$, de S-nek pontosan azok az elemei, amik nem tartalmazzák önmagukat, tehát ez is ellentmondás, így egyik sem fordulhat elő.

A paradoxon kiküszöbölésére több matematikus is elkezdte úgy felépíteni a halmazelméletet, hogy kizárja az ilyen ellentmondásos helyzeteket. A legelterjedtebb a Zermelo-Fraenkel féle axiomatikus felépítés lett. Ebben a modellben csak az a pár axióma érvényes, amit az elején elfogadtak, és azok az állítások, amik ebből levezetetők. Ez az axióma-rendszer nem engedi meg bármilyen halmaz létezését, így a Russel-félét sem.

A Russel-paradoxon megjelenése a Zermelo-Fraenkel-féle axiómatikus halmazelméletben:

Szükséges axiómák:

Egyenlőség: Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor a két halmaz egyenlő.

Egzisztencia: Létezik az üres halmaz.

Részhalmaz: Ha adott egy A halmaz és elemein egy T tulajdonság, akkor $B=\{x \in A: T(x)\}$ is halmaz.

Páraxióma: Adott x-hez és y-hoz létezik olyan halmaz, ami csak őket tartalmazza. $\{x, y\}$ (Mivel $x=y$-t is megengedi, így egyelemű halmaz is létezik.)

Unió: Ha I egy index halmaz és $A=\{A_i : i \in I\}$, akkor legyen $\cup \{A_i: i \in I\} = \cup A$, ami halmaz.

Hatványhalmaz: Ha A halmaz, akkor hatványhalmaza is halmaz. Jele: $P(A)$. (A összes részhalmazaiból álló halmaz.)

Végtelen halmaz létezése: Van végtelen halmaz.

Tétel: Nem létezik az összes halmaz V halmaza.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy létezik ez a V halmaz. Vegyük a következő részhalmazát: $A \coloneqq \{x \in V : x \notin x\}$. Ekkor $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$, ami ellentmondás.

A tételt a *Cantor-tétel* segítségével is be lehet bizonyítani.

Cantor-tétel: Ha A tetszőleges halmaz, akkor $|A|<|P(A)|$.

(Itt $|A|$ az A halmaz számosságát jelöli. A számosság pontos definíciója a *Halmazok számossága* fejezetben.)

Definíció: Két halmaz számossága egyenlő pontosan akkor, ha elemeik között bijekció létesíthető. Ha $|A|\leq|B|$, akkor létezik $f{:}A\to B$ injekció.

Két számosság között < reláció teljesül, ha $\leq$ is teljesül, de nem egyenlők.

Bizonyítás:

I. $|A|\leq|P(A)|$

A páraxióma miatt, megadhatunk egy $f(x)=\{x\}$ injektív leképzést, ahol $f{:}A\to P(A)$.

II. $|A|\neq|P(A)|$

Indirekten tegyük fel, hogy létezik egy $f{:}A\to P(A)$ bijekció.

Vegyük a következő részhalmazt A-ban: $B \coloneqq \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Tudjuk, hogy $B \in P(A)$. Tehát $\exists\, b \in A$, hogy $f(b) = B$. (A bijekció miatt.) Ekkor $b \in B \Leftrightarrow b \notin f(b) \Leftrightarrow b \notin B$. Így ellentmondásra jutottunk és ezzel a tételt beláttuk.

Most bebizonyíthatjuk újra, hogy nincs egy halmazok V halmaza. Indirekt tegyük fel, hogy létezik ilyen V halmaz, akkor Cantor-tétele miatt $|V|<|P(V)|$. De V definíciója miatt $P(V)\subseteq V$ $\Rightarrow|P(V)| \leq|V|$. Így ellentmondásra jutottunk, nem létezhet ilyen halmaz.

A Russel-antinómiának léteznek népszerű, halmazelméleti kifejezéseket nem használó megfogalmazási is. Például:

- Egy katonai táborban egy borbély van. A borbély csak azokat borotválhatja meg, akik nem borotválják önmagukat. Borotválkozhat-e a borbély?
- A világon van egy könyvtár, ahol az összes könyv megtalálható. Ezekhez a könyvekhez a könyvtáros különböző katalógusokat készít (például a verseskötetek, száz oldalnál rövidebb könyvek, stb), amik szintén könyvek, tehát ezek is szerepelhetnek más katalógusokba. Szeretne egy olyan katalógust készíteni, amibe azokat a katalógusokat gyűjti össze, amik nem szerepelnek saját magukban címszóként. Mit csináljon a könyvtáros, beleírhatja-e saját magába ezt a katalógust?

Látszólagos paradoxonok

A most következő paradoxonok nem tartalmaznak valódi ellentmondást, helyes következtetéssel végül meglepő eredményhez juthatunk.

A váratlan akasztás paradoxonja

Egy várúr dühös volt a várbörtön egyik rabjára és közölte vele, hogy jövő héten felakasztják, de nem tudhatja meg korábbi napon, melyik nap, hogy váratlanul érje. A rab ezek után el kezdett okoskodni: „Ha vasárnapig nem akasztanak fel, akkor tudnám, hogy vasárnap fognak, ami nem lenne váratlan, tehát nem akaszthatnak fel vasárnap. De ugyanígy szombaton se akaszthatják fel, hiszen ha addig nem akasztanák fel, akkor nem lenne váratlan a szombat se, hiszen a vasárnap már ki van zárva.” És így indukciós lépésekkel belátta mind a hét napra, majd boldogan hátradőlt, hogy nem akasztják fel. Ezután szegény okos rabot csütörtökön felakasztották.

Játék a végtelennel

A végtelen egy sok ember számára megfoghatatlan fogalom. Amikor először találkoztam vele a matematikában, úgy próbálták nekem elmagyarázni, hogy egy mindennél nagyobb szám. Nem teljesen értettem, hogy ez hogy lehet, hiszen ha hozzáadok még egyet, máris nagyobb számot kéne kapnom. A végtelennel kapcsolatos állítások nem mindig paradoxonok ugyan, mégis egy részük hihetetlen elsőre. Következzen belőlük néhány!

Végtelen szálloda és az okos portás

Tapasztalhatjuk, hogy ha egy szállodába be szeretnénk jelentkezni, de azt mondják, hogy megtelt, akkor ott már nincs szabad szoba, másik helyett kell keresnünk éjszakára. De ha egy végtelen szoba számú szállodáról van szó, akkor nem szabad feladni, véges időn belül szobához juthatunk még aznap este. Egyszerűen a portásnak azt az instrukciót kell adni a hangosbemondón keresztül, hogy mindenki költözzön az eggyel nagyobb számú szobába. Mivel bármely természetes számnál van nagyobb természetes szám, ez megoldható, és az első szoba felszabadul a számunkra.

Szintén megoldható, ha nem csak egy vendég, hanem végtelen számú vendég jön, egy végtelen hosszú busszal. Ekkor a portásnak úgy kell rendelkeznie, hogy minden vendég költözzön a szoba száma kétszeresébe, ezáltal a páratlan sorszámú szobák felszabadulnak. Mivel a páratlan számok éppen $\aleph_0$-an vannak, az újonnan érkezők pont beférnek.

Mi történik, ha egy végtelen hosszú végtelen magas busszal érkeznek a vendégek a tele lévő szállóhoz? Ekkor a bent lakóknak át kell költözniük a 2^x szobába, ahol x az eredeti szoba számuk volt. A busz első emeletén lévő utasok a 3 hatvány szobákba költöznek, a második az 5 hatvány, és így tovább a prímhatványokra. Mivel végtelen sok prím van, és ezek hatványai mind különbözőek a számelmélet alaptétele alapján, ez egy jó szoba beosztás lesz. Ide kapcsolódó feladat: *Hogyan lehet a természetes számokat megszámlálhatóan végtelen sok diszjunkt megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazba osztani?*

Végül tegyük fel, hogy a portás tudja, hogy az éjszaka közepén érkezik egy baráti társaság, akik véges sokan vannak, de nem tudjuk pontosan, hogy hányan. A baráti társaság egymás melletti szobákat szeretne, a többi vendéget pedig nem az éjszaka közepén szeretné költöztetni, úgy hogy még akkor kell megoldani a problémát, amikor még nem tudja pontosan, hányan érkeznek. Mit tegyen? A portásnak végül megint azt az utasítást kell adnia, hogy mindenki emelje a szobaszámát a másodikra és költözzön oda. Miért lesz ez jó?

A $2^{n+1} - 2^n = 2^n$ különbség mindig egy 0-nál nagyobb szám lesz, minden $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$-re. A $2^{n+2} - 2^{n+1} = 2 \cdot (2^{n+1} - 2^n) = 2 \cdot 2^n(2-1) = 2^{n+1}$, tehát mindegyik „lyuk”, az előző kétszerese lesz és a különbség tart a $+\infty$-hez, mivel n tart a $+\infty$-hez. Tehát így mindenképpen fogunk olyan számú üres szobát találni egymás mellett, ahova beférnek a vendégek.

Halmazok számossága

A következő állítások kimondásához és bizonyításához, szükségünk van a következő definíciókra.

Definíció: két halmaz ekvivalens, ha elemei között bijekció, azaz kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Definíció: Minden halmazhoz rendelünk egy számosságot oly módon, hogy az ekvivalens halmazok számossága egyenlő, a nem ekvivalens halmazok számossága pedig különbözik.

Tétel: A halmazok ekvivalenciája ekvivalencia reláció.

Bizonyítás:

1. Reflexivitás
   Ha *f* az identikus leképzés, akkor *f(A)=A*, ami egy jó bijekció.
2. Szimmetria
   Ha létezik *f(A)=B* bijekció, akkor létezik $f^{1}(B)=A$ bijekció is.
3. Tranzitivitás
   Ha léteznek *f(A)=B, g(B)=C* bijektív függvények, akkor az ő kompozíciójuk is bijektív, így $g°f(A) = C$.

Definíció: Egy a_n valós számsorozat határértéke a $+\infty$, ha minden *K* valós számhoz található olyan *N* természetes szám, hogy minden $n > N$ természetes számra $a_n > K$.

Hasonlóan, ha $a_n < K$, akkor $-\infty$ a határértéke.

Tétel: A természetes számok ugyanannyian vannak, mint az egész számok.

Bizonyítás:

Ahhoz, hogy belássuk a tételt a két halmaz között bijekciót kell találnunk. Erre alkalmas függvény az f: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \begin{cases} -k, \text{ha } x = 2k \\ k, \text{ha } x = 2k - 1 \end{cases}$ minden *x* eleme $\mathbb{N}$-re.

Azokat a számosságokat, ami a természetes számok számosságával ($\aleph_0$) egyenlő, megszámlálhatóan végtelennek hívjuk. Látható, ha egy végtelen halmaz elemeit fel tudjuk sorolni, vagyis bármelyik elemről meg tudjuk mondani, hogy hányadik, akkor az egy megfelelő bijekció lesz a halmaz és a természetes számok halmaza között.

Tétel: A racionális számok megszámlálhatóan végtelenen vannak.

Bizonyítás: A racionális számokat sorba tudjuk rendezni. Például a következő féleképpen:

$\dots$	$-\frac{2}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\dots$
$\dots$	$-\frac{2}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\dots$
$\dots$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\dots$
$\dots$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Minden racionális szám felírható két egész szám hányadosaként úgy, hogy a nevező pozitív. Egy sorban azonos nevezőjű számok vannak, egy oszlopban pedig azonos számlálójú. Ebben a felírásban minden szám többször szerepel, csak azokat tekintjük, ahol a számláló és a nevező relatív prím. A számokat V alakban soroljuk fel a $\frac{0}{1}$-ből kiindulva. Következőképpen: $0 \to \frac{0}{1}, 1 \to -\frac{1}{1}, 2 \to \frac{1}{1}, 3 \to -\frac{2}{1}, 4 \to -\frac{1}{2}, 5 \to \frac{1}{2}, 6 \to \frac{2}{1}, 7 \to -\frac{3}{1}, \dots$

Tétel: Megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.

Bizonyítás: Ebben az esetben fel tudjuk sorolni a halmazokat és azoknak elemeit is. Jelöljük őket a következőképpen.

$A_0=\{a_{00}, a_{01}, a_{02}, \dots\}$, $A_1=\{a_{10}, a_{11}, a_{12}, \dots\}$, $A_2=\{a_{20}, a_{21}, a_{22}, \dots\}$, ...

Ekkor akárcsak a racionális számoknál, itt is fel tudjuk őket írni egy táblázatba és hasonlóan meg tudunk határozni egy sorrendet.

a_{00}	a_{01}	a_{02}	...
a_{10}	a_{11}	a_{12}	...
a_{20}	a_{21}	a_{22}	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Felsorolás: $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, \ldots$

Ebben a táblázatban is előfordulhatnak ismétlődő elemek, vagy üres helyek, ezeket kihagyjuk.

Definíció: Egy halmaz számossága kontinuum, ha párba állítható a valós számok halmazával.

Tétel: A kontinuum számosság nem egyenlő a véges és a megszámlálhatóan végtelen számosságokkal.

Bizonyítás:

Először lássuk be néhány részhalmazára, hogy nem megszámlálhatóak.

Állítás: a (0, 1) intervallum pontjai nem megszámlálhatók.

Indirekt tegyük fel, hogy megszámlálhatóak, vagyis fel tudjuk sorolni az össze elemet. Legyenek az a_1, a_2, ... egy felsorolásuk, ahol a_i számjegyei a tizedesvessző után: $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots$ Létrehozunk egy (0, 1) intervallumban levő b_1 számot, aminek a tizedesvessző utáni számjegyeit a következő eljárással kapjuk meg:

$b_{1i} \coloneqq \begin{cases} 8\,, ha\ a_{ii} \neq 8 \\ 7, ha\ a_{ii} = 8 \end{cases}$ $i > 0$, egész. (Természetesen 7-es és 8-as számjegyek tetszőlegesen lettek kiválasztva, 1-8 bármelyik hasonlóan jó lenne.) Ekkor b_1 a (0, 1) intervallum eleme, de különbözik az összes a_i-től. A feltevésünkben az szerepelt, hogy az összes (0, 1)-beli számot felsoroltuk, de mivel mutattunk egyet, ami nincs benne a felsorolásban ellentmondásra jutottunk. Tehát a (0, 1) intervallum pontjai nem megszámlálhatóak. A fenti módszert Cantor-féle átlós módszernek nevezik.

Állítás: a (0, 1) és a [0, 1) halmazok azonos számosságúak.

Bizonyítás: Létezik f: (0, 1) → [0, 1) bijekció. $f(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}^+, ha\ x = \frac{n}{n+1} \\ x, különben \end{cases}$

Állítás: a [0, 1) és a [0, 1] halmazok azonos számosságúak.

Bizonyítás: Létezik f: [0, 1) → [0, 1] bijekció. $f(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+, ha\ x = \frac{1}{n+1} \\ x, különben \end{cases}$

Állítás: a [0, 1) és a (0, 1] halmazok azonos számosságúak.

Bizonytás: Létezik f: [0, 1) → (0, 1] bijekció. $f(x) \coloneqq 1 - x$

Állítás: Bármely két nem üres és nem egy pontból álló korlátos intervallum azonos számosságú.

Bizonyítás: Minden $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$-re létezik a következő bijekció: f: $(0, 1) \to (a, b)$, $f(x) := (b-a)x + a$. Mivel a halmazok ekvivalenciája tranzitív, így bármely két korlátos nyílt halmaz számossága megegyezik. Ugyanígy bármely két korlátos alulról, illetve felülről zárt és korlátos zárt intervallumok számossága egyenlő. Az előző állításokat és az ekvivalencia tranzitivitását felhasználva a feltett állítás következik bármely két korlátos egy pontnál hosszabb intervallumra.

Állítás: (0,1) intervallum és $\mathbb{R}$ számossága megegyezik.

Bizonyítás: Felhasználjuk, hogy a (0, 1) intervallum számossága megegyezik $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$-el, amit előbb beláttunk. Ekkor $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ bijekció. Ezzel igazoltuk, hogy $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$.

Minden ló egyszínű

Ez ugyan nem paradoxon, de hasonlít a látszólagos paradoxonokra. Az előzőkben helyes következtetéssel jutottunk meglepő eredményre, itt a meglepő eredmény azért jön ki, mert a bizonyításban hiba van. Ám mivel elsőre nem mindig találjuk meg a hibát, ezek éppolyan meglepőek tudnak lenni, mint a látszólagos paradoxonok. A „minden ló egyszínű” erre egy tipikus „teljes indukciós” példa.

Lássuk be, hogy minden ló azonos színű! A bizonyítást a ló-csoportok – „ménesek” - létszáma szerinti teljes indukcióval végezzük. Belátjuk, hogy minden n fős ménesben minden ló ugyanolyan színű, ahol n tetszőleges pozitív egész. n=1-re ez természetesen mindig igaz. Tegyük fel, hogy igaz n-re, ezt felhasználva lássuk be n+1-re. Ekkor, ha minden n számú ló-csoportra igaz, akkor egy n+1 fős ménes első n lovára igaz. Ugyanígy igaz a 2., 3., … n., n+1. n fős ló-csoportra is ezen az n+1 fős csoporton belül. Tehát mind az n+1-nek egyszínűnek kell lennie. Tehát minden ló egyszínű. Vagy mégsem?

Valószínűségi paradoxonok

A valószínűségi paradoxonok tipikusan a látszólagos paradoxonok kategóriájába tartoznak.

Születésnapi paradoxon

Ha egy teremben 365 ember van, akkor előfordulhat, hogy mindenkinek az év különböző napján van a születésnapja, míg 366 embernél a skatulya-elv értelmében legalább két embernek egy napon kell lenni-e. (Eltekintve a szökőévektől.) Tehát ekkor 100% az esélye, hogy két ember egy napon született. Vizsgáljuk meg, hogy hány ember kell ahhoz, hogy ez legalább 50% legyen!

Annak a valószínűsége, hogy x ember közül egynek sincs egy napon a szülinapja: $\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdot \ldots \cdot (365-x+1)}{365^x}$

Ennek a komplementerére van szükségünk, tehát: $1-\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdot \ldots \cdot (365-x+1)}{365^x}=p.$

Ez kicsit átrendezve: $1-\frac{\frac{365!}{(365-x)!}}{365^x}$ = p. Ekkor próbálgatással p = 0,51, ha x = 23! x = 57-re pedig p = 0,99. Tehát ha már 57 ember van egy teremben, akkor 99% a valószínűség, hogy 2 ember egy napon született, míg 100% csak 366 embernél lesz.

Ajándékozási paradoxon

Egy osztályfőnök a karácsonyi ajándékozást úgy oldja meg, hogy minden diák hozzon be egy ajándékot és majd véletlenszerűen kisorsolják, hogy melyiket ki kapja. A tanár úgy gondolja, hogy kicsi az esélye, hogy valaki a saját ajándékát kapja vissza. Igaza van?

Az osztály létszáma legyen n. (Legyen $n > 2$, hiszen két fő esetén $\frac{1}{2}$ az esélye, hogy a saját ajándékát kapja vissza.) Ekkor $n!$ féleképpen lehet kiosztani az ajándékokat, ez tehát az „összes” eset. Annak, hogy egy valaki a saját ajándékát kapja vissza $\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$ a valószínűsége. Tehát minél többen vannak, erre annál kisebb az esély. A paradoxon viszont arra vonatkozik, amikor senki nem a sajátját kapja meg. Itt a „kedvező” esetek számát „Szita formulával” tudjuk számolni.

Szita formula

Adva van $A_1, A_2, \ldots A_n$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n+1} S_n,$$

ahol $S_i = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_i \le n} P\left(A_{j_1} \cap \ldots A_{j_i}\right), 1 \le i \le n.$

Így az olyan esetek száma, hogy senki nem kapja vissza a saját ajándékát:

$$\binom{n}{0} n! - \binom{n}{1} (n-1)! + \binom{n}{2} (n-2)! - \cdots + (-1)^n 0!$$

Így a valószínűség *n* emberre:

$$p_n = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Ez a szám pedig $\frac{1}{2}$-nél mindig kisebb, tehát valószínűbb, hogy valaki visszakapja az ajándékát. Az ajándékozási paradoxon azért meglepő, mert annak, hogy egy konkrét ember visszakapja az ajándékát igen kicsi az esély, de annak az esélye, hogy valaki visszakapja, viszonylag nagy. Egy 30 fős osztálynál annak a valószínűsége, hogy senki nem kapja vissza az ajándékát ≈ 0,367879. Tehát annak, hogy valaki visszakapja, közel $\frac{2}{3}$ esélye van.

Monthy Hall paradoxon

Ez a paradoxon egy amerikai vetélkedő kapcsán kapta a nevét, amit Monthy Hall vezetett. Több sikeres feladat megoldása végén minden adást azzal zártak, hogy a versenyzőt három zárt ajtóval szembe állították. Tudta, hogy a háromból kettő mögött kecske van, egy mögött pedig egy autó. Természetesen a cél az volt, hogy az autót nyerjék meg. A versenyző választott egy ajtót, majd a műsorvezető a két maradékból kinyitott egyet, ami mögött kecske volt. Ekkor mindig felajánlotta, hogy változtathat a döntésén, választhatja a másik ajtót. A kérdés az, hogy vajon megéri-e váltani?

Gondolkodhatna úgy a játékos, hogy mindegyik ajtónak 1/3 az esélye, majd egy kizárása után mindkettőnek 1/2-ed, tehát mindegy melyiket választjuk, válthatunk is, meg nem is. A meglepő ebben a feladatban, és amiért paradoxonnak is hívják, hogy a válasz az, hogy igen, megéri váltani.

Bizonyítás:

Arra, hogy elsőre eltaláljuk az autót 1/3 esélyünk van, tehát az estek 2/3-ában elsőre kecskét találunk el. Ezen nem változtat, hogy közben ki lett nyitva egy ajtó. Komplementerrel számolva 2/3-ad az esélye, hogy a másik az autó.

Vizsgáljuk meg egy példán keresztül! Tegyük fel, hogy mindig az A-t választjuk elsőre és a pirossal jelöltet nyitja ki Monthy.

A	B	C	Váltunk	Nem váltunk
kecske	kecske	autó	Nyerünk	Vesztünk
kecske	autó	kecske	Nyerünk	Vesztünk
autó	kecske	kecske	Vesztünk	Nyerünk

Világos, hogy mind a három sornak 1/3-ad az esélye. (A harmadik sorban 1/3-ad az esélye, hogy ott van az autó, a B, C közül egyiket kinyitja 1/2 valószínűséggel, tehát $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.) Mivel ez mind a három ajtóra igaz, így látható, hogy ha váltunk, akkor 2/3 valószínűséggel nyerünk.

Sokkal látványosabb az eredmény, ha nem három, hanem száz ajtó van, amiből 99 mögött kecske, egy mögött autó van. Ekkor, hogy elsőre autót találunk, 1/100-ad esélye van és 99/100-ad, hogy kecske. Tehát, ha a tippelésünk után kinyitnak 98 olyan ajtót, amire nem tippeltünk és nincs mögöttük az autó, akkor a maradéknak 1/100-ad az esélye, hogy kecske és 99/100-ad, hogy autó.

Most módosítsuk a feladatot úgy, hogy három ajtó van, de két versenyző legyen egyszerre és különböző ajtóra kell tippelniük. Az első tippelésük után Monthy kinyitja annak az ajtaját, ami mögött kecske van és ő kiesett a játékból. (Ha mindkettő ajtó mögött kecske van, akkor véletlenszerűen választ közülük.) A bent maradt játékosnak szintén fel lesz ajánlva, hogy változtathat ajtót. Megéri-e most is? Az érdekes az, hogy nem. Csak akkor éri meg változtatni neki, ha elsőre mindketten kecskére tippeltek, de ennek 1/3 a valószínűsége, 2/3 valószínűséggel az egyikük az autóra tippelt. Nézzük meg ezt is táblázatban, tegyük fel, hogy mindig az A-t és a B-t tippelik.

A	B	C	Vált	Nem vált
autó	kecske	autó	Veszít	Nyer
kecske	autó	kecske	Veszít	Nyer
kecske	kecske	kecske	Nyer	Veszít

Itt a két játékosról együtt volt szó, külön-külön 1/3-ad eséllyel nyernek, ha nem váltanak és 1/6 eséllyel, ha váltanak, az estek másik felében kiesik. Így akkor van legnagyobb esélyük a nyerésre, ha mindketten ezzel a stratégiával játszanak és a nyereményt elfelezik.

Bertrand-féle paradoxon

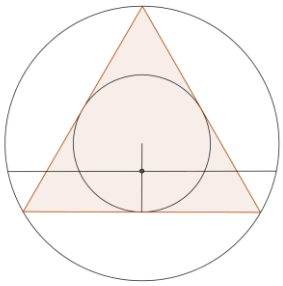
Itt a valószínűséget geometriai úton számoljuk ki. Ekkor egy adott kísérlettel kapcsolatos eseményeket egy geometriai alakzat pontjaihoz rendeljük hozzá és feltételezzük, hogy egy eseményhez tartozó ponthalmaz területe arányos az esemény valószínűségével. Az események valószínűségét a „kedvező" terület per „összes" terület formulával számoljuk. A vizsgált pontok az adott tartományban egyenletesen oszlanak el, tehát egy pont az alakzat egy adott *t* nagyságú különböző területeire ugyanakkora valószínűséggel esik. Ez nem csak két dimenzióban, hanem egyben, háromban is igaz. Három dimenzióban, majd később a Banach-Tarski paradoxonnál azért látjuk, hogy a térfogatnak érdekes tulajdonságai lehetnek.

A geometriai valószínűségnek is vannak paradox tulajdonságai, például, hogy egy céltáblán eltaláljunk egy pontot, annak nulla a valószínűsége. Ugyanis ekkor az $(\frac{1}{\infty})$ határértéket kapjuk eredményül, ami 0. Ennek az az érdekes következménye, hogy a nulla valószínűségű esemény itt nem azonos a lehetetlen eseménnyel. Ugyanekkora a valószínűsége annak is, hogy bármennyi (de véges sok) pont közül találjunk el egyet.

A Bertrand-féle paradoxon úgy szól, hogy ha egy adott körnek kiválasztjuk véletlenszerűen egy húrját, mekkora a valószínűsége, hogy a húr hosszabb lesz, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala? Ellentmondást úgy kapunk, hogy erre a kérdésre három különböző megoldás van, egyikben sincs hiba és mégis más eredmények jönnek ki.

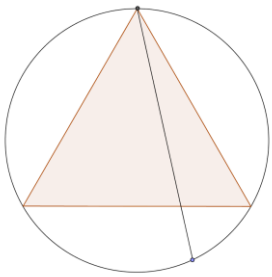
1. megoldás:

Válasszunk ki egy pontot az adott kör belsejében. Minden ilyen ponthoz, hossz szerint egyértelműen, hozzá tudunk rendelni egy húrt, úgy hogy ez a pont legyen a húr felezőpontja. A húr akkor lesz hosszabb a háromszög oldalánál, ha a kiválasztott pontunk a háromszögbe beírható kör belsejébe esik, tehát ez a kedvező terület. Mivel szabályos háromszögnél a háromszög köré írható kör sugara kétszerese a beírható kör sugarának, így a keresett valószínűség: 1/4.



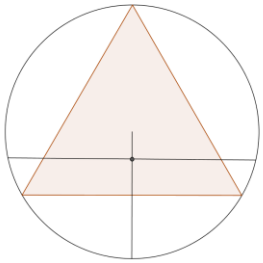
2. megoldás:

A kör forgási szimmetriája miatt a húr egyik végpontját akárhol rögzíthetjük a körvonalon, a másikat pedig tetszőlegesen kiválasztjuk. Rögzítsük a húr végpontját a háromszög egyik végpontjában. A körvonalat a háromszög csúcsai három egyenlő részre osztják, nekünk ezekből az lesz a kedvező eset, ha a másik végpont abba az intervallumba esik, amit a másik két csúcs határol. Tehát a keresett valószínűség: 1/3.



3. megoldás:

Vizsgáljuk a körnek egy tetszőleges sugarát és ezen véletlenszerűen válasszunk ki egy pontot. Határozza meg ez a pont úgy a húrt, hogy ezen a ponton áthaladó, sugárra merőleges szakasz. A húr pontosan akkor lesz hosszabb az oldalnál, ha a pont a sugár középponthoz közelebbi felére esik. Ennek valószínűsége: 1/2.



A három különböző megoldás azért lehetséges, mert ugyan mind a három felfogásban egyenletes eloszlás a „véletlenszerűen választunk”, de nem ugyanazok. Egyszer egy körlapon, egyszer egy köríven és egyszer egy sugáron való eloszlást vizsgáljuk. Vagyis attól függően, hogy hogyan értelmezzük a feladatot, más-más, de ugyanolyan jó megoldásokra jutunk.

Banach-Tarski paradoxon

Hasonlóan az előzőkhöz, itt se egy valódi paradoxonnal van dolgunk, csupán egy nagyon meglepő állítással. A paradoxon egyszerűbb változata azt mondja ki, hogy ha van a térben egy tömör gömbünk, és azt szétdaraboljuk véges sok részre, utána két vele megegyező gömböt tudunk összetenni a darabokból. A paradoxon megmutatja, hogy a háromdimenziós térben sem a térfogat, sem az ennek megfelelő egyenletes valószínűség nem értelmezhető bármilyen korlátos halmazra.

Nem véletlenül hívják aranykészítő paradoxonnak is, hiszen ha az állítás valóban igaz, egy gömböt bármikor megduplázhatunk, és így elég lenne egy apró aranydarab ahhoz, hogy

hatalmas mennyiségű aranyat állíthassunk elő. Miért számít akkor az arany még mindig ritkaságnak, hiába bizonyították be ezt a tételt? Ennek egyrészt vannak gyakorlati okai, hogy nem tudjuk a gömböt „pontokra” szétszedni. Az állítás épp azért működik, mert akkora darabokra szedjük szét, amiknek „nincs térfogatuk”. Nincs olyan berendezésünk, ami ilyen apró darabokra vágna fel egy anyagot, és aztán rendezni is tudná őket megfelelő módon. Másrészt a bizonyításban használjuk a kiválasztási axiómát, amivel kapcsolatban többen vitatták, hogy elfogadják-e axiómának.

Kiválasztási axióma

Az axiomatikus halmazelméletben ez az axióma sokáig nem volt teljes körűen elfogadva a belőle származó érdekes következmények miatt. Maga az axióma így hangzik:

Ha $\{A_i : i \in I\}$ nem üres halmazok rendszere, akkor van olyan I-n értelmezett f függvény, hogy $f(i) \in A_i$ minden $i \in I$-re.

Ahhoz, hogy egy érdekes példát mutassak az axiómára, előtte szükségünk van pár új definícióra.

Definíció: Egy $\prec A, < \succ$ párt rendezett halmaznak nevezünk, ha $<$ rendezi A-t, azaz rendelkezik a következő három tulajdonsággal:

1. $x < x$ sohasem teljesül (irreflexivitás)
2. ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$ (tranzitivitás)
3. ha $x, y \in A$, akkor $x < y$, $x = y$ vagy $y < x$ közül pontosan egy igaz (trichotómia)

Definíció: Egy $\prec A, < \succ$ halmazt jólrendezett halmaznak nevezünk, ha minden nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.

Példa: $\prec \mathbb{N}, < \succ$ jólrendezett, $\prec \mathbb{Z}, < \succ$ nem jólrendezett.

Definíció: Egy halmaz jólrendezhető, ha megadható hozzá olyan rendezés, hogy a halmaz jólrendezett legyen.

És akkor a tétel bizonyítás nélkül:

Tétel (Jólrendezési tétel): Ha igaz a kiválasztási axióma, akkor minden halmaz jólrendezhető.

Szükség volt az axiómára, mivel az előtte lévőkből nem lehetett levezetni és mégis több helyen használták. Például ebben a dolgozatban is alkalmazva volt már, a megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható bizonyításnál. Ettől függően bizonyos munkákban mai napig jelzik (AC), hogy a kiválasztási axiómát is használják benne.

A paradoxon bizonyítása

A paradoxon bizonyításához szükségünk lesz több tétel, lemma bizonyítására és újabb definíciókra, valamint a dolgozatomban korábban bebizonyított állításokat is felhasználok.

Definíció: Átdarabolhatóság

Vegyünk egy H ponthalmazt, ami felbontható páronként diszjunkt nem üres H_i véges számú részhalmazokra, úgy hogy $H=H_1 \cup H_2 \cup \ldots$ Alkalmazzunk minden H_i-re egy egybevágósági transzformációt, ami átviszi H'_i-be. Így $H'=H'_1 \cup H'_2 \cup \ldots$ Ekkor, ha H'_i-k is páronként diszjunktak, akkor H átdarabolható H'-be és fordítva. Jele: $H \leftrightarrow H'$.

1. Lemma: Minden körvonal átdarabolható egy vele azonos sugarú körvonalba, amelynek egy pontja hiányzik.

Bizonyítás:

A bizonyításban felhasználjuk, hogy a természetes számok és a természetes számok egy szám kivételével vett halmazoknak a számossága megegyezik. Legyen a kiválasztott körünknek a sugara r, középpontja O, a körvonal pontjainak halmaza H, és egy tetszőleges pontja pedig P_0. Célunk, hogy találjunk egy egybevágóságot ez a kör és egy szintén r sugarú kör között, amiben nincs benne a P_0.

Legyen z tetszőleges irracionális szám. Forgassuk el P_0-t $z, 2z, 3z \ldots iz \ldots$ szögekkel O körül így kapva rendre $P_1, P_2, P_3 \ldots P_i \ldots$ pontokat. Az $i \rightarrow P_i$ hozzárendelés injektív $\forall\, i \in \mathbb{N}$-re, $P_i=P_j$ csak akkor lesz igaz, ha $i=j$. Ha P_i egybeesik P_j-vel, akkor iz-jz-nek a 360 egy egész többszörösének kell lenni, tehát $iz-jz=k$ egész szám. Amiből, ha $i \neq j$, akkor $z=\frac{k}{i-z}$, ami ellentmond annak, hogy z egy irracionális szám. Tehát $i=j$.

Legyen $H_1=\{P_0, P_1, P_2, \ldots P_i, \ldots\}$, H_2 pedig a körvonal többi pontja. Világos, hogy a körvonal pontjai $H = H_1 \cup H_2$. Adjunk meg egy olyan f hozzárendelést H-hoz, hogy f H_2 pontjait hagyja helyben, H_1 P_i pontjaihoz pedig rendelje hozzá a P_{i+1}-et. (Forgassa el őket O körül z-vel.) Láthatjuk, hogy f jó hozzárendelés, hiszen H összes pontját P_0 kivételével megkapjuk.

Definíció: A és B két diszjunkt ponthalmaz. Ekkor, ha A-hoz és B-hez is létezik olyan egybevágósági transzformáció, ami $A \cup B$-be viszi őket, akkor A és B is *megduplázható* halmaz.

Mielőtt a térben vizsgálnánk meg a paradoxont, lássuk be, hogy már a síkban is vannak megduplázható ponthalmazok.

1. Tétel: A síkban létezik két diszjunkt ponthalmaz, A és B úgy, hogy A és B is egybevágó $A \cup B$-vel, tehát A (és B is) megduplázható.

Bizonyítás:

Definíció: egy számot algebrainak nevezünk, ha az gyöke legalább egy egész együtthatós nem azonosan nulla egyváltozós polinomnak.

Lássuk be, hogy az algebrai számok megszámlálhatóan vannak!

Szükségünk van a következő egészeken értelmezett függvényre:

$$A(n) = \begin{cases} -2n, ha\ n \leq 0, \\ 2n - 1, ha\ n > 0, \end{cases}$$

A hozzárendelés bijekció az egész és a nemnegatív egész számok között.

Legyen w olyan szám, hogy tartozik hozzá egy algebrai $z=cosw+isinw$ szám és $w \in [0,2\pi)$ intervallumnak. Ez a z legyen gyöke az $a(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ egész együtthatós polinomnak. Mivel $a(x)$-nek véges gyöke van az algebra alaptétele szerint, így sorba tudjuk őket állítani, ezt jelöljük i-vel. Ekkor minden w-hez hozzá tudunk rendelni egyértelműen egy természetes számot a következő féleképpen:

$$2^i \cdot 3^{A(a_0)} \cdot 5^{A(a_1)} \cdot 7^{A(a_2)} \cdot \ldots \cdot p_{n+1}^{A(a_n)}$$

ahol p_{n+1} az $n+1$. páratlan prímszám. Ez a leképzés injektív a természetes számok egy részhalmazára, különböző w-hez, nem fogja ugyanazt a számot rendelni. A természetes számok minden részhalmaza véges vagy megszámlálható, fentebb pedig már láthattuk, hogy a valós számok egy intervalluma (ha nem üres vagy csak egy pont) nem megszámlálható. Mivel fentebb a $[0,2\pi)$ intervallumban az összes algebrai számhoz tudtunk rendelni injektíven egy természetes számot, így ebben az intervallumban (és bármelyik másikban, amiket szintén nézhettünk volna) van megszámlálhatatlan nem algebrai (transzcendens) szám is.

Vegyünk egy nem algebrai z számot. Ekkor $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 \neq a'_n z^n + a'_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a'_1 z^1 + a'_0$, ahol $a_0, a_1, \ldots a_n$ természetes számok, hacsak az együtthatók nem egyenlők. Hiszen akkor $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0 - (a'_n z^n + a'_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a'_1 z^1 + a'_0) = 0$ egyenlőségnek a z gyöke lenne, ami ellentmond annak, hogy ő egy nem algebrai szám.

Adjunk meg *A* ponthalmazt úgy, hogy elemei a komplex sík azon pontjai, amik előállíthatók a $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0$ $(a_i \geq 0, egész, a_0 \neq 0)$ alakban.

B elemei pedig a $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1$ alakban felírható komplex számok, szintén minden $a_i \geq 0$ $egészek$. Nyilván ennek a két halmaznak nem lesznek közös elemeik, diszjunktak.

Ezután mindkét halmazon elvégezhetjük a következő egybevágósági transzformációkat: *A* halmaz elemeit toljuk el $a - 1$ vektorral, *B*-t forgassuk el az origó körül –*w* radiánnal (szorozzuk meg $\frac{1}{z}$-vel). Így mindkét halmazból az *A*∪*B*-hez jutunk, azoknak a pontoknak az összességéhez, amik előállnak egy nemnegatív egész együtthatójú egyváltozós polinom *z* helyen felvett értékeihez. Ezzel az 1. Tétel-t bebizonyítottuk.

Lássuk be, hogy ha *A*↔*B*, és *A* megduplázható, akkor *B* is. Ehhez szükségünk van arra, hogy az átdarabolhatóság tranzitív tulajdonság, tehát ha *A*↔*B* és *B*↔*C*, akkor *A*↔*C*. Ez igaz, tudjuk, hogy létezik *f* bijekció az átdarabolhatóság miatt, hogy *f(A)=B*. *g* pedig egy másik bijekcó, úgy hogy *g(B)=C*. (Szintén tudjuk, hogy létezik.) Ekkor a $g \circ f$ pont jó átdarabolás lesz, $g \circ f(A) = C$. Ebből már következik a fenti állítás.

Rögzítsünk a térben egy *O* középpontú gömböt. Az r_1 és r_2 legyenek *O*-n átmenő különböző egyenesek. R_1^+-al jelöljük az r_1 tengely körül egy pozitív irányú forgatást, R_2^+ egy r_2 tengely körülit. R_1^- és R_2^--al jelöljük a forgatások inverzeit. Ennek a négy forgatásnak a tetszőleges egymás utáni alkalmazásaival a gömb önmagára való leképzését kapjuk.

Az R_1^+, R_2^+, R_1^-, R_2^- forgatások egymás utáni véges sokszori alkalmazását szavaknak hívjuk. Így például az $R_1^+ R_1^+$ egy szó vagy $R_2^- R_1^- R_1^- R_1^+ R_2^+$ is egy szó. Itt a második példában látható, hogy az $R_1^- R_1^+$ egymás után kiejtik egymást, tehát ez elhagyható. Az olyan szavakat, amikben egyik forgatás és az inverze sincs közvetlenül egymás után redukált szavaknak hívjuk. Továbbiakban mivel főleg redukált szavakkal dolgozunk, az egyszerűség kedvéért csak szavaknak hívjuk őket. Két szót akkor tekintünk egyenlőnek, ha ugyanazt a leképzést

adják. Üres szónak hívjuk, amikor egyik forgatást se használjuk, ez a gömb helyben hagyását jelenti, jele: *I*.

2. Lemma: Léteznek olyan $R_1^{\pm}$ és $R_2^{\pm}$ forgatások, amikből alkotható egyetlen szó sem egyenlő az üres szóval.

Bizonyítás:

A bizonyításban mutatunk egy példát, amire ez teljesül. Felveszünk egy térbeli koordináta-rendszert, aminek a középpontja *O*. A két egyenesünk legyen az *z*, illetve a *x* tengely, a forgatási szögünk pedig $arccos\frac{1}{3}$.

Ekkor $R_1^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $R_1^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_2^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{-2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Innentől elegendő az $R_1^{\pm}$-ra végződő szavakat vizsgálni, hiszen ha minden $R_1^{\pm}$ és $R_2^{\pm}$ felcserélnénk, csak azon változtatna, hogy melyik koordinátára hat. Arra nem lenne hatással, hogy a forgatás egység-e, hiszen az *I* minden koordinátát egyhelyben hagy. Tehát *w* jelölje azokat a szavakat, ami a fenti forgatásokból állnak és $R_1^{\pm}$ végződnek. Vizsgáljuk meg, hogy az $(1,0,0)^T$ mi lesz a képe a *w* szavak alkalmazása után.

Állítás: $w \cdot (1,0,0)^T$mindig $[(a, b \cdot \sqrt{2}, c)/3^n]^T$alakú, ahol *a, b, c* egészek, *n*≥1 a *w* szó hossza és *b* nem osztható hárommal.

Ha ezt belátjuk, készen vagyunk, ugyanis ha *w* egység lenne, akkor $w \cdot (1,0,0)^T = (1,0,0)^T$, ahol *b*=0, osztható hárommal.

Ennek a bizonyítása teljes indukcióval történik. Nézzük meg az *n*=1 esetet, ahol *w*=$R_1^{\pm}$. Ekkor $w \cdot (1,0,0)^T = [(1, \pm 2 \cdot \sqrt{2}, 0)/3]^T$, itt *a, b, c* valóban egészek és *b* nem osztható hárommal, tehát egyre igaz az állítás. Tegyük fel, hogy minden *n*-1 (*n*>1) szóra igaz az állítás, tehát

$w_{n-1} \cdot (1,0,0)^T = [(a_{n-1}, b_{n-1} \cdot \sqrt{2}, c_{n-1})/3^{n-1}]^T$, ahol b_{n-1} nem osztható hárommal. A w_{n-1}-ből az összes *n* hosszú szót megkaphatjuk, ha az elejére a négyféle forgatásból egyet teszünk. Így megkapjuk, hogy

$w_{R_1^{\pm}n} \cdot (1,0,0)^T = [(a_{n-1} \mp 4b_{n-1}, (b_{n-1} \pm 2a_{n-1}) \cdot \sqrt{2}, 3c_{n-1})/3^n]^T$ és

$w_{R_2^{\pm}n} \cdot (1,0,0)^T = [(3a_{n-1}, (b_{n-1} \mp 2c_{n-1}) \cdot \sqrt{2}, c_{n-1} \pm 4b_{n-1})/3^n]^T$.

A $w_{R_1^{\pm}n}$, $w_{R_2^{\pm}n}$ azt jelenti, hogy a w_{n-1}-et melyik forgatással szoroztuk meg balról. Látható, hogy a megfelelő konstansok egészek, a b 3-al való oszthatóságát pedig négy különböző esetben kell vizsgálni.

1. eset

Nézzük azt az esetet, amikor $R_1^{\pm} \cdot R_2^{\pm} \cdot w_{n-2}$. Ekkor $R_2^{\pm} \cdot w_{n-2}(1,0,0)^T = [(3a_{n-2}, (b_{n-2} \mp 2c_{n-2}) \cdot \sqrt{2}, c_{n-2} \pm 4b_{n-2})/3^{n-1}]^T$.

Másrészt w_{n-1} miatt $w_{n-1} \cdot (1,0,0)^T = [(a_{n-1}, b_{n-1} \cdot \sqrt{2}, c_{n-1})/3^{n-1}]^T$, ahonnan $3a_{n-2} = a_{n-1}$. Mivel $w_{R_1^{\pm}n} \cdot (1,0,0)^T =$

$= [(a_{n-1} \mp 4b_{n-1}, (b_{n-1} \pm 2a_{n-1}) \cdot \sqrt{2}, 3c_{n-1})/3^n]^T$=$[(a_n, b_n\sqrt{2}, c_n)/3^n]^T$, így ezeket felhasználva kapjuk, hogy b_n=$b_{n-1} \pm 2a_{n-1} = b_{n-1} \pm 6a_{n-2}$. Tudjuk, hogy b_{n-1} nem osztható 3-al, az összeg másik fele osztható, tehát b_n nem lesz osztható 3-al.

2. eset

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor $R_2^{\pm} \cdot R_1^{\pm} \cdot w_{n-2}$. Ebben az esetben $R_1^{\pm} \cdot w_{n-2}(1,0,0)^T = [(a_{n-2} \mp 4b_{n-2}, (b_{n-2} \pm 2a_{n-2}) \cdot \sqrt{2}, 3c_{n-2})/3^{n-1}]^T$.

Valamint w_{n-1} miatt $w_{n-1} \cdot (1,0,0)^T = [(a_{n-1}, b_{n-1} \cdot \sqrt{2}, c_{n-1})/3^{n-1}]^T$, ahonnan $3c_{n-2} = c_{n-1}$.

$w_{R_2^{\pm}n} \cdot (1,0,0)^T = [(3a_{n-1}, (b_{n-1} \mp 2c_{n-1}) \cdot \sqrt{2}, c_{n-1} \pm 4b_{n-1})/3^n]^T$ =$[(a_n, b_n\sqrt{2}, c_n)/3^n]^T$ Ezeket felhasználva kapjuk, hogy b_n=$b_{n-1} \mp 2c_{n-1} = b_{n-1} \pm 6c_{n-2}$. Mivel b_{n-1} nem osztható 3-al, az összeg másik fele osztható, tehát b_n nem lesz osztható 3-al.

3. eset

$R_2^{\pm} \cdot R_2^{\pm} \cdot w_{n-2}$ lehetőséget nézzük. Ebben az esetben $R_2^{\pm} \cdot w_{n-2}(1,0,0)^T = [(3a_{n-2}, (b_{n-2} \mp 2c_{n-2}) \cdot \sqrt{2}, c_{n-2} \pm 4b_{n-2})/3^{n-1}]^T$.

w_{n-1} miatt $w_{n-1} \cdot (1,0,0)^T = [(a_{n-1}, b_{n-1} \cdot \sqrt{2}, c_{n-1})/3^{n-1}]^T$, ahonnan $c_{n-1} = c_{n-2} \pm 4b_{n-2}$és $b_{n-1} = b_{n-2} \mp 2c_{n-2}$.

Ismét felhasználva, hogy $w_{R_2^{\pm}n} \cdot (1,0,0)^T = [(3a_{n-1}, (b_{n-1} \mp 2c_{n-1}) \cdot \sqrt{2}, c_{n-1} \pm 4b_{n-1})/3^n]^T$ =$[(a_n, b_n\sqrt{2}, c_n)/3^n]^T$, következik, hogy

$b_n = b_{n-1} \mp 2c_{n-1} = b_{n-1} \mp 2(c_{n-2} \pm 4b_{n-2}) = b_{n-1} \mp 2c_{n-2} - 8b_{n-2} = b_{n-1} + (b_{n-2} \mp 2c_{n-2}) - 9b_{n-2} = 2b_{n-1} - 9b_{n-2}$.

Ahol b_{n-1} nem osztható 3-al, tehát b_n se.

4. eset

Végül a $R_1^{\pm} \cdot R_1^{\pm} \cdot w_{n-2}$ esetet nézzük. Itt $R_1^{\pm} \cdot w_{n-2}(1,0,0)^T = [(a_{n-2} \mp 4b_{n-2}, (b_{n-2} \pm 2a_{n-2}) \cdot \sqrt{2}, 3c_{n-2})/3^{n-1}]^T$.

w_{n-1} miatt $w_{n-1} \cdot (1,0,0)^T = [(a_{n-1}, b_{n-1} \cdot \sqrt{2}, c_{n-1})/3^{n-1}]^T$, ahonnan $a_{n-1} = a_{n-2} \mp 4b_{n-2}$és $b_{n-1} = b_{n-2} \pm 2a_{n-2}$.

Ismét felhasználva, hogy $w_{R_1^{\pm}n} \cdot (1,0,0)^T = [(a_{n-1} \mp 4b_{n-1}, (b_{n-1} \pm 2a_{n-1}) \cdot \sqrt{2}, 3c_{n-1})/3^n]^T$=$[(a_n, b_n\sqrt{2}, c_n)/3^n]^T$, következik, hogy

$b_n = b_{n-1} \pm 2a_{n-1} = b_{n-1} \pm 2(a_{n-2} \mp 4b_{n-2}) = b_{n-1} \pm 2a_{n-2} - 8b_{n-2} = b_{n-1} + (b_{n-2} \pm 2a_{n-2}) - 9b_{n-2} = 2b_{n-1} - 9b_{n-2}$.

Ahol b_{n-1} nem osztható 3-al, tehát b_n se.

Tehát mind a négy esetben kijött, hogy b_n nem osztható 3-al, ezzel a bizonyítást be is fejeztük. Megkaptuk, hogy léteznek olyan forgatások, amikből alkotható szavak egyik se egyenlő az üres szóval.

Vezessük be a szavak között a következő műveletet: két szónak megfelelő transzformációk egymás utáni alkalmazását a két szó *szorzatának* nevezzük és egymás után írással jelöljük. Meg kell jegyezni, hogy hiába a két szavunk redukált szó, a szorzatuk nem biztos, hogy az lesz. Például $w_1 = R_1^- R_1^- R_2^-$, $w_2 = R_2^+ R_1^+ R_2^-$, akkor $w_1 \cdot w_2 = R_1^- R_1^- R_2^- R_2^+ R_1^+ R_2^- = R_1^- R_2^-$. De ezeket mindig lehet csökkenteni, hogy redukált szót kapjunk (ami akár az üres szó is lehet).

Szükségünk van arra, hogy ez a művelet asszociatív, mivel egy középpont körül forgatom őket, ez nyilvánvaló. $(w_1 \cdot w_2) \cdot w_3 = w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3) = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3$

Szintén felhasználjuk, hogy bármilyen w szóra $w \cdot I = I \cdot w = w$ igaz és létezik inverze w^{-1}.

Mostantól olyan forgatásokkal foglalkozunk, amikre fennáll a 2. Lemma, ezeket független forgatásoknak nevezzük. Ekkor, ha két szóra igaz, hogy $w_1 = w_2$, akkor $w_1 \cdot w_2^{-1} = w_2 \cdot w_2^{-1} = I$. Ez csak úgy lehet, ha w_1-nek w_2^{-1} az inverze, tehát w_1 és w_2 pontosan ugyanazokat a forgatásokat tartalmazzák ugyanabban a sorrendben, azaz ugyanazok.

Nevezzük el *H*-nak a gömbfelület egy részhalmazát, $w(H)$-nak pedig azt a részhalmazt, amibe *H*-t egy *w* szó viszi.

Egy *w* szó fixpontjának nevezzük azokat a pontokat, amelyekre $w(p) = p$.

3. Lemma: A gömbfelület azon pontjainak a halmaza, melyek fixpontjai valamelyik szónak, megszámlálható.

Bizonyítás:

Egy nem üres szónak maximum két fixpontja lehet. Ha már legalább három volna, akkor abból kettő nem egymás átellenes pontjai lennének és így a rajtuk áthaladó főkör összes pontja is fixpont lenne. Ez azonban nem lehet, mivel akkor ez vagy a helyben hagyás lenne, de kikötöttük, hogy olyan forgatásokról beszélünk, amikre a 2. Lemma igaz. Vagy a főkör síkjára való tükrözés lenne, de ez szintén nem lehet, mivel a forgatások irányítástartók egy tükrözés pedig irányításfordító.

Ha a szónak van egy fixpontja, akkor rendeljük hozzá a 0-át, ha kettő, akkor a 0-át és az 1-et rendre. Majd a $R_1^+, R_1^-, R_2^+, R_2^-$-höz rendre rendeljük hozzá a 0, 1, 2, 3-at. Így minden fixponthoz hozzá tudunk rendelni egyértelműen egy természetes számot a következőképpen:

$2^{a_0} \cdot 3^{a_1} \cdot 5^{a_2} \cdot \ldots {p_n}^{a_n}$, ahol p_n az *n*. páratlan prímszámot jelöli, a_0 azt mutatja, hogy hányadik fixpontja a szónak, $a_i, i > 0\ egész$, pedig az *i*. forgatás számát. Így mind különböző természetes számokat kapunk, tehát a fixpontok száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

A gömbfelületen a fixpontok halmazát jelölje *F*, a többi pontot pedig *S*. A következő relációt vezetjük be *S* pontjai között: *Q* pont a *P* pontból *elérhető*, ha van olyan *w* szó, hogy *w(P)=Q*. Ha *w* az üres szó, akkor is értelmezhető, *w(P)=P*, így elérhetőség reflexív tulajdonság.

Szimmetrikus is, mivel tudjuk, hogy minden szónak van inverze, így $P=w^{-1}(Q)$ és tranzitív is a szavak összeszorozhatóságából. ($w_1(P)=Q$, $w_2(Q)=R$, akkor $w_2 \cdot w_1(P)=R$) Tehát, az elérhetőség ekvivalencia reláció, amely által S pontjai ekvivalencia osztályokba sorolhatók. Egy osztályban pontosan azok a pontok vannak, amik egymásból elérhetőek. Egy elem természetesen nem lehet két különböző osztályba, hiszen akkor rajta keresztül az egyik osztály pontjaiból el lehetne érni a másikat és így egy osztály lennének.

Minden egyes osztályból válasszunk ki pontosan egy elemet, ők alkotják az M halmazt. (Itt alkalmazzuk a kiválasztási axiómát.) Lássuk be, hogy a $w(M)$ halmazok, ahol w minden szón átfut, S-nek páronként diszjunkt felbontásait adják. $w(M) \subseteq S$, hiszen indirekt tegyük fel, hogy ha nem lenne, akkor lenne olyan $P \in S$, hogy $w(P)$ fixpontja egy nem üres szónak, például f-nek. Ekkor $f(w(P))=w(P)$, amiből $w^{-1}(f(w(P)))=w^{-1}w(P)=P$. Ez csak akkor lehet, ha a $w^{-1}fw$ az üres szó, hiszen P nem fixpont. Tehát $f=w(w^{-1}fw)w^{-1}=wIw^{-1}=I$. Ez ellentmondás, hiszen feltettük, hogy f ne az üres szó legyen. S minden pontja legalább egy $w(M)$-nek eleme, hiszen S összes pontja valamelyik ekvivalencia osztályban van, minden osztályból választottunk egy pontot M-be, és ha rajta alkalmazzuk az összes szót, minden pontjának az osztályból elő kell állnia. Valamint S minden pontja legfeljebb csak egy halmazban lehet, mivel ha P, $Q \in M$ és $w_1(P)=w_2(Q)$, akkor $w_1^{-1}w_2(Q) = P$, vagyis P elérhető Q-ból, ami M miatt csak akkor lehet, ha $P=Q$. Ekkor $w_1^{-1}w_2(P) = P$. Mivel P csak az üres szónak fixpontja $w_1=w_2$.

Az összes szót osszuk be négy diszjunkt halmazba a következő féleképpen:

A_1: ahol az R_1^+ az utolsó forgatás a szóban

A_2: ahol az R_1^- az utolsó forgatás a szóban

A_3: ahol az R_2^+ az utolsó forgatás a szóban, azok a szavak, amik csak R_2^--ból állnak és az I

A_4: ahol az R_2^- az utolsó forgatás a szóban és az A_3-ban nem szerepelnek

Ha A_1 minden szavát megszorozzuk balról R_1^--el, akkor az A_1, A_3, A_4 összes szavát megkapjuk és A_2 szavaiból azonban egyet sem. Hasonlóan, ha A_2-t megszorozzuk balról R_1^+-el, A_2, A_3, A_4 összes szavát megkapjuk, A_1-ből egyet sem. Ugyanígy a másik kettővel is elvégezhető ez a művelet. Innen már majdnem kész vagyunk a bizonyítással, fordítsuk le ezt a geometria nyelvére.

H_1, H_2, H_3, H_4 halmazok rendre legyenek az M pontjain A_1, A_2, A_3, A_4 szavak alkalmazásával kapott pontok. Mivel nem fordulhat elő, hogy M két különböző pontján két különböző vagy ugyanazt a szót alkalmazva azonos ponthoz jussunk, H-k diszjunktak. És mivel láttuk, hogy egy ekvivalencia osztályból egy pont az összes osztálybeli pontot előállítja, így a H-k uniója az S. Ekkor $R_1^-(H_1) = H_1 \cup H_3 \cup H_4$. Ezt hasonlóan a másik három halmazzal is végre lehet hajtani, és a negyedik halmazzal kapott uniójuk az S-t adja. S-t ezzel megdupláztuk, hiszen ha például A=$H_1 \cup H_2$, B=$H_3 \cup H_4$, akkor mindkét esetben az első halmaz helyben hagyásával és a második megfelelő forgatásával mindkettőből megkapjuk az $A \cup B$-t. Még azt kell belátni, hogy S átdarabolható az egész gömbfelületbe. Hiszen korábban már láttuk, hogy ha $A \leftrightarrow B$, és A megduplázható, akkor B is

Felhasználjuk azt, hogy F megszámlálható, amit már korábban beláttunk. Mivel egy tetszőleges főkörön kontinuum sok pont van, így kell lennie egy egyenesnek, mint a kör átmérőjének, hogy egyik metszéspontja a körrel se legyen fixpont. Ezt a térbeli egyenest, ami átmegy a gömb középpontján, nevezzük el r-nek.

Legyen A az olyan $\alpha \in [0, 2\pi)$ szögek halmaza, amikhez létezik n pozitív egész szám és $f \in F$ pont, hogy f-et $n \cdot \alpha$-al forgatva r körül az f képe egy F-beli pont lesz. A halmaz megszámlálható, mivel f-nek megszámlálható pont lehet a képe és ezekhez megszámlálható α tartozik és megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható.

Nevezzük az A-n kívüli szögeket „jó” szögeknek és vizsgáljuk meg őket. β legyen egy jó szög. Ekkor tetszőleges $f \in F$-re, és n pozitív egész számra $n \cdot \beta(f)$ F-en kívül lesz.

Tegyük fel, hogy q olyan pontja a gömbfelületnek, hogy eleme a $n \cdot \beta(F)$ és $m \cdot \beta(F)$ halmaznak is, ahol $n, m > 0$ természetes számok és $n > m$. Ekkor $(-m) \cdot \beta(q)$ eleme lenne az $(n\text{-}m) \cdot \beta(F)$ és az F halmaznak is. Ez azonban nem állhat fenn a jó szögek meghatározása miatt, hiszen $n\text{-}m > 0$ egész és ennek nem lehet metszéspontja a F-el. Tehát, tetszőleges $n, m > 0$ egészekre $n \cdot \beta(F) \cap m \cdot \beta(F) = 0$.

Legyen p egy jó szög. Forgassuk el F-et r körül p, $2p$, …ip,… szöggel és rendre kapjuk F_1, F_2, ... F_i... páronként diszjunkt halmazokat. Az F_i-k unióját jelölje H. H nyilván az S részhalmaza, hiszen az F-el való metszete üres kell, hogy legyen a jó szög definíciója miatt. Most a következő transzformációt végezzük el S-en: $S \backslash H$-t hagyjuk helyben, H-t pedig forgassuk el $-p$ fokkal. Ezzel F_1 pont az F-be fog kerülni és így S-ből az egész gömbfelületet megkaptuk.

Engedjük meg, hogy a forgatások során, ne csupán a gömbfelület pontját, hanem az odamutató sugarat is a gömb középpontja kivételével forgassuk, így az egész gömböt megduplázhatjuk a középpontja kivételével. Mivel korábban beláttuk, hogy egy kör és egy ugyanolyan sugarú kör egy pontja elhagyásával átdarabolható egymásba, így ha ezt a kört a gömb középpontján áthaladva vesszük fel az egész gömb megkapható. Ezzel a gömb megduplázhatóságát be is láttuk. Innentől a meggazdagodáshoz vezető út ki van kövezve, hiszen ha egy darabot meg tudtunk duplázni, akkor annak is egy darabját meg tudjuk duplázni és így tovább. Sajnos a művelet egyelőre csak akkor működik, ha gömb alakú aranyunk van, de innen már csak pár lépés, hogy általánosítsunk. Ehhez szükségünk lesz pár új fogalomra:

Definíció: A tér egy H ponthalmazát korlátosnak nevezzük, ha létezik egy d konstans, hogy H bármely ponthalmazára $AB<d$.

Definíció: A tér egy ponthalmazát *telt*nek hívjuk, ha részhalmazaként tartalmaz nem nulla sugarú gömböt.

2. Tétel: **A Banach-Tarski paradoxon** Legyen A és B korlátos és telt ponthalmaz. Ekkor $A \leftrightarrow B$.

A bizonyításhoz szükségünk van a következő lemmára:

4. Lemma: Ha $A \leftrightarrow B$ és $X \subseteq A$, akkor létezik $Y \subseteq B$, hogy $X \leftrightarrow Y$.

Bizonyítás: Mivel $A \leftrightarrow B$, ezért létezik egy $f(A)=B$ hozzárendelés és $f^{-1}(B)=A$. Ekkor léteznie kell egy $Y \subseteq B$, hogy $f(X)=Y$ és $f^{-1}(Y)=X$, amivel be is láttuk, hogy átdarabolhatóak. Ha ez nem így lenne, akkor $f(A \setminus X)=B$, tehát X elhagyásával is átdarabolható lenne B-be. Ekkor viszont $f^{-1}(B)=A \setminus X$-et adná csak vissza, tehát az átdarabolhatóság nem lenne kölcsönös.

Egyelőre már tudjuk igazolni, hogy ha A egy tetszőlegesen nagy korlátos ponthalmaz és B egy telt halmaz, akkor A átdarabolható B egy részhalmazába. Ugyanis B-nek van egy gömb részhalmaza, aminek a véges sokszori megduplázásával A lefedhető. Másrészt az A-t lefedő gömbök átdarabolható egy gömbbé, így A átdarabolható B gömböt tartalmazó részhalmazába.

5. Lemma: Legyen $A_1 \subseteq A$ és $B_1 \subseteq B$. Ha $A_1 \leftrightarrow B$ és $B_1 \leftrightarrow A$, akkor $A \leftrightarrow B$.

Látható, hogy az előző alapján, ha ennek a lemmának a bizonyításával kész leszünk, akkor a tételt is beláttuk, a paradoxon igaz lesz minden korlátos, telt ponthalmazra.

Legyen f a $B_1 \leftrightarrow A$ átdarabolásnál használt $A \rightarrow B_1$ bijekció, g pedig az $A_1 \leftrightarrow B$-nél használt $B \rightarrow A_1$. $C_0 = A \setminus A_1$. Továbbá $C_{n+1} = g(f(C_n))$ és C a C_i-k uniója. Belátjuk, hogy $g(B \setminus f(C)) = A \setminus C$.

Az egyenlőség bizonyítását kétirányú tartalmazással látjuk be.

1. $g(B \setminus f(C)) \subseteq A \setminus C$

$g(B) = A_1 \subseteq A$, amiből $g(B \setminus f(C)) \subseteq A$. Még kell, hogy $g(B \setminus f(C))$ és C diszjunktak. C_0-ról ezt természetesen tudjuk, így elég a $C \setminus C_0$-al foglalkoznunk. $g(f(C)) = C_1 \cup C_2 \cup C_{3\ldots}$ami részhalmaza a $C \setminus C_0$-nak. Alkalmazzuk g^{-1}-et, ekkor: $f(C) \supseteq g^{-1}(C \setminus C_0)$. Tehát a $B \setminus f(C)$ és $g^{-1}(C \setminus C_0)$ diszjunktak. Ekkor az átdarabolhatóság definíciója miatt g-nél vett képük is diszjunkt.

2. $g(B \setminus f(C)) \supseteq A \setminus C$

Látható, hogy $g(B) = A_1 = A \setminus C_0 \supseteq A \setminus C$.

$g(f(C)) \subseteq C$, így $g(f(C)) \cap (A \setminus C)$ üres. Tehát $f(C) \cap g^{-1}(A \setminus C)$ is üres. Alkalmazzuk g inverzét az eredeti tartalmazásra, így azt kapjuk, hogy $B \setminus f(C) \supseteq g^{-1}(A \setminus C)$. Ezzel pedig a bizonyítást be is fejeztük.

Megkaptuk, hogy $g(B \setminus f(C)) = A \setminus C$, ami azt jelenti, hogy $B \setminus f(C) \leftrightarrow A \setminus C$. Természetesen az $f(C) \leftrightarrow C$ így kijött, hogy $A \leftrightarrow B$.

Végszó

Számtalan paradoxon van, ami hely hiányában végül nem férhetett bele ebbe a gyűjteménybe. Próbáltam úgy összeválogatni, hogy melyikek kerüljenek be, hogy több témát is érintsek és ne csak a legismertebbekről írjak. Sajnos így is végül többet ki kellett hagynom, mint terveztem. Úgy vélem, hogy tanárként a paradoxonokat jól tudom majd alkalmazni egy-egy téma színesebbé tételéhez, a diákok érdeklődésének a felkeltéséhez.

Felhasznált irodalom

[1] Barcza István, 2010. *Matematikai Paradoxonok,* https://www.google.hu/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=6&cad=rja&uact=8&ved=0CEAQFjAF&url=http%3A%2F%2Fphbences.hu%2Ffiles%2Fupload%2FSTATISZTIKAI%2520PARADOXONOK%2520t%25C3%25B6m%25C3%25B6r%25C3%25ADtve.doc&ei=U1djVY3vCYGtsgG8-YHADQ&usg=AFQjCNGZqr7Y-1PCQYH_SftPGBI307yv1w&sig2=5p25JS1_hGYCBCppcAFddQ&bvm=bv.93990622,d.bGQ [Letöltve: 2015. 03. 04.]

[2] Beke Tibor, 1989. *Hogyan csináljunk aranyat, avagy a Banach-Tarski paradoxonról,* KöMal, 39. évfolyam (10) : p. 433 – 439.

[3] Blahota István, 1992. *A Banach-Tarski-paradoxon,* http://nikportal.cickany.hu/view/BMF/Netware/dip.pdf [Letöltve: 2015. 03. 04.]

[4] Fizikai Paradoxonok

http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:kwEuPWSeRl8J:titan.physx.u-szeged.hu/physics/expphys/oktatas/ppt_mm/paradoxonok1.ppt+&cd=5&hl=hu&ct=clnk&gl=hu [Letöltve: 2015. 04. 07.]

[5] Fried Katalin, Korándi József, Török Judit, *Elemi matematika példatár tanároknak,* TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0007

[6] cs.elte.hu, *Halmazok számossága*, http://www.cs.elte.hu/~pfeil/bsp14-1.pdf [Letöltve: 2015. 05. 25]

[7] Karinthy Frigyes, 1946. *Betegek és Bolondok,* Új Idők Irodalmi Intézet, Budapest

[8] Komjáth Péter, 2007. *Halmazelmélet*, Budapest http://www.cs.elte.hu/~kope/oktatas/ma1.pdf [Letöltve: 2015. 04. 28.]

[9] Székely J. Gábor, 1982. *Paradoxonok a véletlen matematikájában*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest