Elemszám-homogén halmazrendszerek leírása.

Bi-lexikus rendezés alkalmazásai.

Fekete Márta
Alkalmazott matematikus MSc

Témavezető: *Frank András*
ELTE TTK Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2013.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Elemszám-homogén halmazrendszerek leírása **5**

3. Matroid elemszám-homogén független halmazainak politópja **13**

4. Elemszám-homogén polimatroid **17**

5. Duál konzisztens lineáris egyenlőtlenségrendszerek és elemszám-homogén halmazok poliéderei **20**

5.1. Duál konzisztens lineáris egyenlőtlenségrendszerek 20

5.2. Elemszám-homogén halmazok konvex burkának leírása két előírt elemszám esetén 21

5.3. Elemszám-homogén halmazok konvex burkának leírása több előírt elemszám esetén 23

5.4. Példa 1: Elemszám-homogén polimatroidok 24

5.5. Példa 2: Elemszám-homogén párosítások páros gráfban 24

6. A bi-lexikus rendezés **27**

6.1. A bi-lexikus rendezés fogalma és tulajdonságai 27

6.2. A mátrixok bi-lexikus rendezésének algoritmusa 29

6.3. Gráfok lexikus rendezése 31

6.3.1. Példa: fák lexikus rendezése 35

6.3.2. A lexikus rendezés és a Havel-Hakimi algoritmus 37

7. A bi-lexikus rendezés alkalmazásai **39**

7.1. Teljesen kiegyensúlyozott mátrixok és a Γ-nélküli rendezés 39

7.2. Teljesen kiegyensúlyozott mátrixok és az erősen merevkörű gráfok 42

7.3. Merevkörű gráfok és a szimpliciális sorrend 43

7.4. Teljesen kiegyensúlyozott hipergráfok és az átlós páros gráfok 45

7.5. Biszimpliciális élek páros gráfokban 47

8. Összefoglalás **50**

1. Bevezetés

A szakdolgozatom témáját tekintve két részből épül fel. Az első részben olyan kombinatorikus optimalizálási problémák poliéderes leírásával foglalkozunk, melyekben kikötést teszünk a megoldások elemszámára. Például egy irányított gráfban kizárólag a 2 vagy 4 hosszúságú utak közül szeretnénk kiválasztani egy adott célfüggvény szerinti optimálisat. Azt az esetet vizsgáljuk, amikor az előírt megengedett elemszámok egy véges halmazból kerülnek ki, akkor hogyan lehet leírni a feltételeknek eleget tevő halmazok incidenciavektorainak a konvex burkát. Angolul az ilyen problémákat a szakoridalom cardinality constrained combinatorial optimization néven tartja számon. Mi ezt értjük az elemszám-homogén halmazrendszerek poliéderes leírása cím alatt.

A probléma leírása a szakirodalomban 30 évre tekint vissza. Bemutatunk egy lineáris egyenlőtlenségrendszert, ami leírja az előírt elemszámú halmazok incidenciavektorainak konvex burkát. Úgynevezett tiltott halmaz egyenlőtlenségeket lehet megfogalmazni, melyek levágják a feltételnek nem eleget tevő elemszámú halmazok incidenciavektorait. Ilyen egyenlőtlenségeket először az 1980-as évek elején publikált P. Camion és J. F. Maurras, majd 2004-ben M. Grötschel újra felfedezte őket. Először ezzel a rendszerrel foglalkozunk, majd a probléma általánosításának irányában haladunk a publikációk kronológiáját követve. A leírás helyességének bizonyításban hangsúlyos szerepet kap a mohó algoritmus. Ezt a fonalat megragadva kiderül, hogy hasonló módon megfogalmazhatóak érvényes egyenlőtlenségek akkor is, ha az alaphalmaz egy matroid. Mutatunk egy leírást az elemszám-homogén független halmazok matroid poliéderére, ami J. F. Maurras és R. Stephan 2010-es munkáján alapul. A következő lépésben az elemszám-homogén polimatroidok leírásával foglalkozunk az egyre frissebb cikkek nyomán. Érdekes figyelemmel kísérni a bizonyítások felépítésének változását. Végül S. Fujishige és J. Massberg eredményét mutatjuk be, mely általános határoló függvények által definiált poliéderek esetén mutat szükséges és elégséges feltételt a leíró egyenlőtlenségrendszer érvényességére vonatkozóan. A leíró rendszerek egy tulajdonsága kapcsán egy más témájú munka is előkerült, mely átvezetett a szakdolgozat második részéhez.

A következő részben egy mátrixokhoz definiált rendezéssel és annak alkalmazásaival foglalkozunk. A fő szakirodalmi forrás A. Lubiw tézise. Angolul a doubly lexical ordering elnevezés van használatban, mi a rövidség kedvéért bi-lexikus rendezésnek hívjuk a mátrix sor- és oszlopvektorainak lexikografikusan növekvő sorrendjét és az azt létrehozó algoritmust. Vizsgáljuk a rendezés tulajdonságait. A gráfok szomszédsági mátrixának szimmetrikus bi-lexikus rendezése alapján a gráf csúcsainak sorrendjére is értelmet nyer a definíció

(a csúcsok lexikus sorrendje) és érdekes alkalmazásokkal szolgál. A rendezés alkalmazásával jól vizsgálható, hogy a mátrixok tartalmaznak-e bizonyos speciális részmátrixokat, illetve a gráfokban előfordulnak-e valamely tulajdonságú részgráfok. Kiderül, hogy a teljesen kiegyensúlyozott mátrixok osztálya karakterizálható ily módon, valamint a merevkörű gráfok felismerésére, a csúcsok szimpliciális sorrendjének előállítására gazdagodunk egy módszerrel.

2. Elemszám-homogén halmazrendszerek leírása

Ebben a részben M.Grötschel munkája [1] alapján mutatjuk be az eredményeket. Legyen adott $E=\{1,2,\ldots,n\}$ véges halmaz. Tegyük fel, hogy $E\neq\emptyset$, azaz $n\geq 1$. Egy $\mathcal{C}\subseteq 2^E$ részhalmazrendszert elemszám-homogénnek nevezünk, ha teljesül, hogy ha $\mathcal{C}$ tartalmazza E-nek egy k elemszámú ($0\leq k\leq n$) részhalmazát, akkor E minden k elemű részhalmazát tartalmazza.
Példák elemszám-homogén halmazrendszerekre:

- $\mathcal{C}=2^E$;
- $\mathcal{C}=\{F\subseteq E \mid |F| \text{ páros }\}$;
- $\mathcal{C}=\{F\subseteq E \mid |F| \text{ páratlan }\}$;
- $\mathcal{C}= U_{k,n}$ uniform matroid köreinek halmaza.

A jelölések tömörségének érdekében bevezetjük a $c=(c_1,\ldots,c_m)$ nemüres, egész számokból álló vektort, hogy fennáll $0\leq c_1<c_2<\ldots<c_m\leq n$. Ezt előírt elemszám sorozatnak nevezzük.
Bevezetjük az alábbi jelöléseket az elemszám-homogén halmazrendszerek definíciója alapján:

$$C(n;c_i):=\{A\in E \mid |A|=c_i\},\ i=1,\ldots,m,$$
$$C(n;c):=C(n;c_1,\ldots,c_m):=\cup_{i=1}^{m} C(n;c_i)$$

A fent definiált elemszám-homogén halmazok incidenciavektorainak konvex burkát az alábbi poliéderrel jelöljük:

$$P(n;c):=P(n;c_1,\ldots,c_m):=\operatorname{conv}\{\ \chi_A\in\mathbb{R}^E \mid A\in C(n;c)\ \}.$$

Célünk $P(n;c)$ poliéder teljes, nem redundáns leírásához megtalálni az alkalmas egyenlőségeket és egyenlőtlenségeket. Az E halmaz minden eleme maximum egyszer szerepelhet egy halmazban, az alaphalmaz elemszámának a legnagyobb és legkisebb előírt érték közé kell esnie, így a következő egyenlőtlenségeknek teljesülniük kell $P(n;c)$-re:

$$0\leq x_j\leq 1, j=1,\ldots,n, \tag{1}$$

$$c_1\leq \widetilde{x}(E)\leq c_m. \tag{2}$$

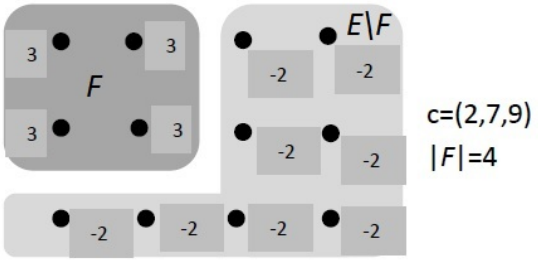
Azoknak az $F\subseteq E$ részhalmazoknak a halmazát, melyek elemszáma nem az előírt értékek közül kerül ki, az alábbiakban $\mathcal{F}$-el jelöljük. Később tiltott (elemszámú) halmazokként hivatkozunk rájuk.

$$\mathcal{F}:=\mathcal{F}(c_1,\ldots,c_m):=\{F\subseteq E \mid c_1<|F|<c_m,\ |F|\neq c_j,\ j=2,\ldots,m-1\},$$
$$f:=f(F):=\max\{\ j\in\{1,\ldots,m\text{-}1\} \mid c_j<|F|\ \}\quad \forall\ F\in\mathcal{F}.$$

Minden $\mathcal{F}$-beli F halmazra fennáll, hogy $c_f < |F| < c_{f+1}$. A $P(n;c)$ poliéder leírásakor szükség van olyan egyenlőtlenségekre, melyek levágják a nem c-beli elemszámú halmazok incidenciavektorait. Nevezzük el őket CF-egyenlőtlenségeknek.

$$CF_F(x) := \sum_{j\in F}(c_{f+1} - |F|)x_j - \sum_{j\notin F}(|F| - c_f)x_j =$$

$$= (c_{f+1} - |F|)\widetilde{x}(F) - (|F| - c_f)\widetilde{x}(E\backslash F) \leq (c_{f+1} - |F|)c_f =: s(F) \tag{3}$$



1. ábra. *Egy tiltott elemszámú részhalmazhoz tartozó CF-egyenlőtlenség szemléltetése.*

Az 1. ábra az $F \subseteq E$ részhalmazhoz tartozó CF-egyenlőtlenséget szemlélteti. Az egyenlőtlenségrendszer érvényességének bizonyítása előtt gonduljuk végig egy konkrét példán, mit is jelent itt a fent definiált korlát. Az alaphalmaz elemszáma $|E|$=12, az előírt elemszám sorozat c=$(2, 7, 9)$. A kiválasztott sötét szürkével jelölt F halmaz tiltott elemszámú, ugyanis $|F|$=4, emiatt tartozik hozzá egy CF-egyenlőtlenség, ahol c_{f+1}=7, c_f=2, azaz

$$(7\text{-}4)\widetilde{x}(F) \text{ - } (4\text{-}2)\widetilde{x}(E\backslash F) \leq (7\text{-}4)3$$

Emiatt a részhalmazhoz tartozó CF-egyenlőtlenségben az F-beli elemek együtthatója 7-4=3, míg a nem F-belieké -(4-2)=-2. Ilyen súlyozás mellett összegezve az $x(e)$ értékeket (e∈E) a szumma legfeljebb 6 lehet. Azt tapasztaljuk, hogy azok a halmazok, melyek F-be legfeljebb 2 elemmel metszenek bele, azokra az egyenlőtlenség teljesül, illetve ezek közül pontosan akkor teljesül egyenlőséggel a megszorítás, ha ez egy F-beli két elemű halmaz. Ha egy $T\subseteq E$ halmaz F-be 2-nél több elemmel metsz bele, akkor annak $E\backslash F$-be is kell metszenie, hogy teljesüljön az egyenlőtlenség. Ezek az F elemeiből legalább 3-at tartalmazó halmazok (melyekre $x(e)\in \{0,1\}$ $\forall e \in E$) pontosan akkor teljesítik egyenlőséggel a korlátot, ha az összes F-belit és még 7-4=3 $E\backslash F$-beli elemet tartalmaznak.

A továbbiakban megfogalmazunk 4 állítást a tiltott halmazokhoz meghatározott egyenlőtlenségekkel kapcsolatban.

2.1. Állítás. *Minden CF-egyenlőtlenség érvényes P(n;c)-re.*

Bizonyítás: A következőkben belátjuk, hogy minden CF-egyenlőtlenség igaz $P(n;c)$-re. Megmutatjuk, hogy egy tiltott halmazhoz tartozó egyenlőtlenség minden előírt elemszámú halmaz karakterisztikus vektorára igaz. Legyen $F\in\mathcal{F}$ tiltott elemszámú, $f=f(F)$, tehát $c_f < |F| < c_{f+1}$ és $S\in C(n;c)$ megengedett elemszámú halmaz. Az F-hez tartozó CF-egyenlőtlenségbe az S halmaz karakterisztikus vektorát behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$(c_{f+1}-|F|)\chi_S(F)-(|F|-c_f)\chi_S(E\setminus F) = (c_{f+1}-|F|)|F\cap S|-(|F|-c_f)|(E\setminus F)\cap S|.$$

Ha $|S|\leq c_f$, akkor $|F\cap S| \leq c_f$, a kivonandó pedig nemnegatív, így azt elhagyva $CF_F(\chi_S)\leq s(F)$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $|S|=c_f$ és $S\subseteq F$.
Ha $|S|>c_f$, akkor $|S|\geq c_{f+1}$. Ekkor $|(E\setminus F)\cap S|=|S\setminus F|\geq c_{f+1}-|F|$. Az $|F\cap S|\leq|F|=c_f+|F|-c_f$ átírással a következőt kapjuk:

$$(c_{f+1}-|F|)|F\cap S|-(|F|-c_f)|(E\setminus F)\cap S| \leq$$
$$(c_{f+1}-|F|)c_f+(c_{f+1}-|F|)(|F|-c_f)-(|F|-c_f)(c_{f+1}-|F|) =(c_{f+1}-|F|)c_f=s(F),$$

egyenlőség akkor áll fenn, ha $|S|=c_{f+1}$ és $S\cap F=F$. □

2.2. Állítás. *Minden $y\in\mathbb{R}^E\setminus \mathrm{P}(\mathrm{n;c})$ 0-1 vektorhoz, melyre $c_1\leq \widetilde{y}(\mathrm{E})\leq c_m$ létezik legalább egy olyan CF-egyenlőtlenség, ami szeparálja $\mathrm{P}(\mathrm{n;c})$-től.*

Bizonyítás: Legyen $y\in\{0,1\}^E\setminus P(n;c)$, $c_1\leq\widetilde{y}(E)\leq c_m$. Legyen F az a részhalmaza E-nek, melyre $\chi_F=y$. Az y választása miatt $F\in\mathcal{F}$. Az F-hez tartozó CF-egyenlőtlenség bal oldalán $(c_{f+1}-|F|)|F|$ áll, ami $|F|>c_f$ miatt nagyobb, mint $s(F)$. Tehát y biztosan sérti az F-hez tartozó CF-egyenlőtlenséget. □

2.3. Állítás. $\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=c_i+1}^{c_{i+1}-1}\binom{n}{k}$ *CF-egyenlőtlenség van, ezek száma általában nem polinomiális n-ben.*

2.4. Állítás. *Egy CF-egyenlőtlenség minden együtthatója különbözik 0-tól.*

Adott $c=(c_1,\ldots,c_m)$ elemszám sorozathoz definiáljuk a következő poliédert:

$$Q(n;c):=Q(n;c_1,\ldots,c_m):=\{\ x\in\mathbb{R}^E \mid x \text{ kielégíti az (1), (2), (3) egyenlőtlenségeket }\}.$$

Az 1.1 Állítás miatt a leírni kívánt vektorokra mind a 3 egyenlőtlenség igaz, tehát

$$P(n;c)\subseteq Q(n;c).$$

Továbbá az 1.2 Állítás és az elemszám korlátok miatt azt is mondhatjuk, hogy

$$P(n;c)=\text{conv}\{\ x \in \{0,1\}^E \mid x \in Q(n;c)\ \}.$$

Tehát egy lineáris célfüggvény $P(n;c)$ poliéderen való maximalizálásának a relaxáltja a célfüggvény $Q(n;c)$-n történő maximalizálása.

2.1. Tétel. *$P(n;c)=Q(n;c)$ minden $E=\{1,\ldots,n\}$ véges halmazra és $c=(c_1,\ldots,c_m)$ elemszám sorozatra.*

Az 1.1 Tétel bizonyításához jó eszköz a primál és duál mohó algoritmus vizsgálata. Definiálunk egy mohó algoritmust, mely minden w célfüggvényre talál megengedett megoldást a $\max\{\ w^\mathsf{T}x \mid x\in P(n;c)\}$ problémára. Majd leírunk egy algoritmust, ami a $\max\{\ w^\mathsf{T}x \mid x\in Q(n;c)\}$ duális feladatra talál megengedett megoldást. Ezután belátjuk, hogy a két célfüggvényérték megegyezik. Ebből arra jutunk, hogy $P(n;c)=Q(n;c)$.

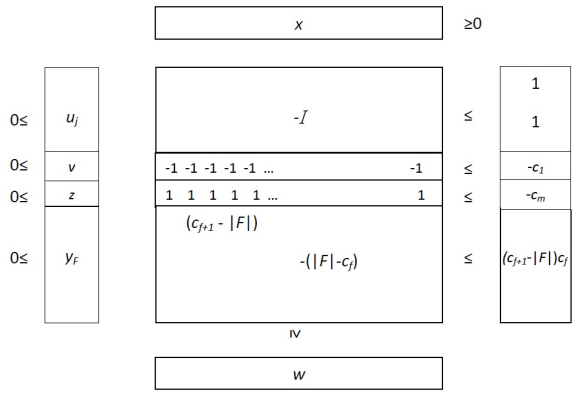
Primál és duál mohó algoritmus

Adott $E=\{1,\ldots,n\}$ véges halmaz, elemein w_i súlyozás ($i\in E$). Az előírt elemszámok vektora $c=(c_1,\ldots,c_m)$, ahol $0\leq c_1<\ldots<c_m\leq n$. Célunk megtalálni a legnagyobb súlyú olyan halmazt, aminek az elemszáma megengedett, azaz c elemei közül való. Az alább bemutatott algoritmus meghatározza a maximális súlyú $S^*\subseteq E$ halmazt, hogy $|S^*|=c_i$ valamely $i=1,\ldots,n$-re.

Primál mohó algoritmus

1. Rendezzük E elemeit a súlyuk alapján nemcsökkenő sorrendbe, hogy $w_1\geq w_2\geq\ldots\geq w_n$.
2. Ha $w_{c_m}\geq 0$, akkor $S^*:=\{1,\ldots,c_m\}$, VÉGE.
3. Ha $w_{c_1}\leq 0$, akkor $S^*:=\{1,\ldots,c_1\}$, VÉGE.
4. Különben (ha $w_{c_1}<0<w_{c_m}$),
   - Jelöljük p-vel azt a legnagyobb egész számot, $1\leq p\leq n$, amire $w_p>0\geq w_{p+1}$,
   - Jelölje q azon indexét a c vektornak, melyre $c_q\leq p<c_{q+1}$.
   - $h:=\sum_{j=c_q+1}^{c_{q+1}} w_j$.
5. Ha $h>0$, akkor $S^*:=\{1,\ldots,c_{q+1}\}$,
   különben $S^*:=\{1,\ldots,c_q\}$. VÉGE.

Az S^*-t mohó megoldásnak nevezzük. Mivel χ_{S^*} csúcsa a $P(n;c)$ polidérnek, így $w^\mathsf{T}\chi_{S^*}$ nem nagyobb, mint $\max_{x\in P(n;c)}\ w^\mathsf{T}x$, ami pedig alsó korlátja a $\max_{x\in Q(n;c)}\ w^\mathsf{T}x$ relaxált optimumértékének.
Írjuk fel a primál probléma relaxáltját és annak duálisát, ahogy azt a következő ábra szemlélteti.



2. ábra. *A lineáris programozási feladat mátrixa*

A primál feladat:

$$\max\ w^{\mathsf{T}} x$$

$$x_j \leq 1 \quad j=1,\ldots,n,$$

$$-\widetilde{x}(E) \leq -c_1,$$

$$\widetilde{x}(E) \leq c_m,$$

$$(c_{f+1}-|F|)\widetilde{x}(F)-(|F|-c_f)\widetilde{x}(E\setminus F) \leq (c_{f+1}-|F|)c_f \quad F\in\mathcal{F},$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,\ldots,n. \tag{4}$$

A duál feladat:

$$\min \textstyle\sum_{j=1}^{n} u_j - c_1 z + c_m z + \sum_{F\in\mathcal{F}} (c_{f+1}-|F|)c_f y_F$$

$$u_j - v + z + \textstyle\sum_{F\in\mathcal{F}, j\in F} (c_{f+1}-|F|)y_F - \sum_{F\in\mathcal{F}, j\notin F} (|F|-c_f)y_F \geq w_j, \quad j=1,\ldots,n$$

$$v,z \geq 0,$$

$$u_j \geq 0, \quad j=1,\ldots,n,$$

$$y_F \geq 0, \quad F\in\mathcal{F}. \tag{5}$$

A duál feladat megoldása következik. A primál mohó algoritmus kiindulásához hasonlóan a $w_{c_m}\geq 0$, illetve a $w_{c_1}\leq 0$ esetekre gyorsan adódik az optimális megoldás. Ha $w_{c_m}\geq 0$, akkor $z:=w_{c_m}$, $u_j:=w_j-w_{c_m}$ $(j=1,\ldots,c_m)$, a többi változó értéke pedig 0. Ha $w_{c_1}\leq 0$, akkor $v:=-w_{c_1}$, $u_j:=w_j-w_{c_1}$ $(j=1,\ldots,c_1)$, a többi változó pedig 0. Látjuk, hogy mindkét esetben a duál változókhoz definiált értékek kielégítik a korlátokat, tehát megoldáshoz jutottunk,

valamint a duál célfüggvény értéke megegyezik a primál mohó algoritmus során kapott S^* halmaz súlyával.

Hátra van még az az eset, amikor a primál algoritmus a 4. lépésbe ér. Ekkor az 5. pontban h értéke szerinti esetszétválasztással jutottunk a megoldáshoz. Definiáltuk a q ($1 \leq q \leq m$-1) indexet, hogy az alaphalmaz elemei közül a c_q darab legnagyobb elemet kiválasztva csak pozitív súlyú elemeket találunk, míg a legnagyobb c_{q+1} elem már nempozitív súlyút is tartalmaz. Definiáljuk az $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ részhalmazt elemei felsorolásával:

$$F_k := \{1, 2 \ldots, k\}, \quad k = c_q+1, c_q+2, \ldots, c_{q+1}-1.$$

A súlyfüggvény maximalizálása érdekében a primál mohó algoritmus amíg lehet, addig pozitív elemeket választ ki egy megengedett elemszámú halmazt létrehozva. Akkor kérdéses a választás, ha két olyan megengedett elemszám között vagyunk, ahol a kisebb c-beli elemszámú csak pozitív elemeket tartalmaz, míg a rákövetkező előírt elemszámú halmazba már negatív elemek is kerülnek. Azt kell eldönteni, hogy ez a kettő közül melyiknek lesz nagyobb súlya. A primál mohó algoritmus 4. lépéséhez definiált probléma:

$$\max\ w^{\mathsf{T}} x$$

$$x_j \leq 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{k} (c_{q+1}-k) x_j - \sum_{j=k+1}^{n} (k-c_q) x_j \leq (c_{q+1}-k) c_q, \quad k = c_q+1, \ldots, c_{q+1}-1.$$

Ennek a duálisának keressük az optimális megoldását:

$$\min \sum_{j=1}^{n} u_j + \sum_{k=c_q+1}^{c_{q+1}-1} (c_{q+1}-k) c_q y_{F_k}$$

$$u_j \geq, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$y_{F_k} \geq 0, \quad k = c_q+1, \ldots, c_{q+1}-1,$$

$$u_j + \sum_{k=c_q+1, k \geq j}^{c_{q+1}-1} (c_{q+1}-k) y_{F_k} - \sum_{k=c_q+1, k<j}^{c_{q+1}-1} (k-c_q) y_{F_k} \geq w_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Duál mohó algoritmus h=0 esetén:

1. Legyen $y^*_{F_k} := \frac{w_k - w_{k+1}}{c_{q+1} - c_q}, \quad k = c_q+1, \ldots, c_{q+1}-1.$
2. Legyen $u^*_j := w_j - \sum_{k=c_q+1, k \geq j}^{c_{q+1}-1} (c_{q+1}-k) y^*_{F_k} + \sum_{k=c_q+1, k<j}^{c_{q+1}-1} (k-c_q) y^*_{F_k}.$
3. A többi változó legyen 0.

A fentiek alapján kapott u^* és y^* a duál mohó algoritmus megoldásai, melyek kielégítik a feltételeket és ha h=0, akkor a célfüggvény értéke megegyezik a primál mohó algoritmus célfüggvény értékével. Abban az esetben, ha $h\neq 0$, a következő átalakítással vissza tudjuk vezetni a feladatot a h=0 esetre.

Ha $h<0$, akkor megnöveljük a célfüggvény w_j koordinátáinak értékét $j=c_q+1,\ldots,c_{q+1}$-re oly módon, hogy a növelés után a nemcsökkenő rendezés az elemek súlya szerint érvényes maradjon, így elérve a h=0 esetet. Ez nem változtatja meg a primál mohó algoritmus optimális megoldásának értékét, és a relaxált duálisának megengedett megoldásai az feladat megoldásai lesznek a növelés után is. Alkalmazzuk a duál mohó algoritmust h=0 esetén.

Abban az esetben, ha $h>0$, akkor csökkentjük a súlyokat $j=c_q+1,\ldots,c_{q+1}$ valamely elemein, hogy az új w'_j értékekre $h'=\sum_{j=c_q+1}^{c_{q+1}} w'_j = 0$ és a rendezés továbbra is fennáll az eredeti indexelés mellett. Ezután I_g és I'_g primál optimális megoldások értékére igaz, hogy $w(I_g)=w(I'_g)+h$. A duál mohó algoritmus után megkapjuk u' és y' megoldásokat, melyekből megkapjuk $u^*_j=u'_j+w_j-w'_j$, $j=1,\ldots,n$, $y^*=y'$ optimális duál megoldásokat.

Belátható, hogy h=0 esetén $u^*_j=0$, ha $j=c_q+1,\ldots,c_{q+1}$, illetve $u^*_j=w_j$-w_{c_q+1}, ha $j=1,\ldots,c_q$. A számolásokat itt nem közöljük, az érdeklődő Olvasó utána nézhet az irodalomjegyzékben feltüntetett [1] cikkben. Az algoritmus futásideje az elemek rendezése miatt $O(n\log n)$.

Röviden kitérünk a leírás teljesen duális egészértékűségének kérdésére. Adott $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix és $b \in \mathbb{R}^m$ vektor által meghatározott $\{Ax \leq b,\, x\geq 0\}$ lineáris egyenlőtlenségrendszert teljesen primál egészértékűnek mondunk, ha a $\max\{w^\mathsf{T} x \mid Ax \leq b,\, x\geq 0\}$ lineáris optimálizálási feladatnak van optimális egészértékű x megoldása minden $w \in \mathbb{R}^n$ vektorra, amire létezik optimális megoldás. Azt mondjuk, hogy a lineáris egyenlőtlenségrendszer teljesen duálisan egészértékű, röviden TDI, ha a $\min\{y^\mathsf{T} b \mid yA \leq w,\, y\geq 0\}$ duális feladatnak minden egészértékű w esetén van egészértékű optimális $y \in \mathbb{R}^m$ megoldása, feltéve, hogy létezik optimális megoldás.

Felmerül a kérdés, hogy mit tudunk elmondani a bemutatott leírás TDI voltáról. A [1] cikk tartalmaz ellenpéldát, mely mutatja, hogy az itt közölt leírás nem TDI. További gondolkodásra ösztönző lehet az elemszám-homogén halmazok poliéderéhez TDI leírást keresni.

Szeparációs algoritmus

A leíró egyenlőtlenségrendszer vizsgálata során kiderül, hogy könnyen el tudjuk dönteni egy $y \in \mathbb{Q}^n$ pontról, hogy eleme-e a $P(n;c)$ poliédernek, és ha nem, akkor találunk egy tőle elválasztó hipersíkot. Először ellenőrizzük, hogy a vektor minden koordinátája 0 és 1 közé esik-e, illetve $\widetilde{y}(E)$ c_1 és c_m közötti értékét vesz-e fel. Tegyük fel, hogy az előbb említett feltételek teljesülnek y-ra.

Célunk egy olyan tiltott elemszámú halmaz megtalálása, amihez tartozó CF-egyenlőtlenség nem teljesül y-ra. Megfigyeljük, hogy ha y megsért egy $F \in \mathcal{F}$ halmazhoz tartozó CF-egyenlőtlenséget, akkor mindig tudunk hozzá találni olyan $F^* \in \mathcal{F}$ halmazt, amihez tartozó CF-egyenlőtlenséget szintén sérti y. A keresett F^* olyan tulajdonságú, hogy $|F^*|=|F|=k$ és $\sum_{j \in F^*} y_j$ maximális. Tehát y koordinátáit nemnövekvő sorrendbe rendezzük, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$ és $F^*:=\{1,\ldots,k\}$. Így y akkor és csak akkor elégíti ki az F^*-hoz tartozó CF-egyenlőtlenséget, ha kielégít minden k elemszámú $F \in \mathcal{F}$-hez tartozó CF-egyenlőtlenséget.

Mohó szeparációs algoritmus $P(n;c)$-re:
Adott $E=\{1,2,\ldots,n\}$, $c=(c_1,\ldots,c_m)$, $y \in \mathbb{Q}^n$. STOP azt jelenti, hogy találtunk y-t $P(n;c)$-től elválasztó hipersíkot.

1. Ha létezik $j=1,\ldots,n$, hogy $y_j<0$ vagy $y_j>1$, akkor STOP: $y \notin P(n;c)$.
2. Ha $\widetilde{y}(E)<c_1$ vagy ha $\widetilde{y}(E)>c_m$, akkor STOP:$y \notin P(n;c)$.
3. Rendezzük y koordinátáit nemnövekvő sorrendbe: $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$.
4. Vizsgáljuk $k=c_1+1,\ldots, c_m$-1 és $k \neq c_i$, $i=2,\ldots,m-1$,

   $$\text{ha} \quad \sum_{j=1}^{k} (c_{f+1}-k)y_j - \sum_{j=k+1}^{n}(k-c_f)y_j > (c_{f+1}-k)c_f, \text{ ahol} \quad f = f(\{1,\ldots,k\})$$

   akkor STOP, ugyanis y sérti az $F_k=\{1,\ldots,k\}$ halmazhoz tartozó CF-egyenlőtlenséget, azaz $y \notin P(n;c)$.
   Ha nem állt meg az algoritmus, akkor $y \in P(n;c)$.

Az ebben a részben közöl eredményeket M. Grötschel [1] cikkje alapján követtük végig. Történeti szempontból említésre méltó, hogy az itt tárgyalt egyenlőtlenségrendszert J.F. Maurras már korábban, 1977-ben publikálta [5]-ben, tehát Grötschel újrafelfedezte őket.

3. Matroid elemszám-homogén független halmazainak politópja

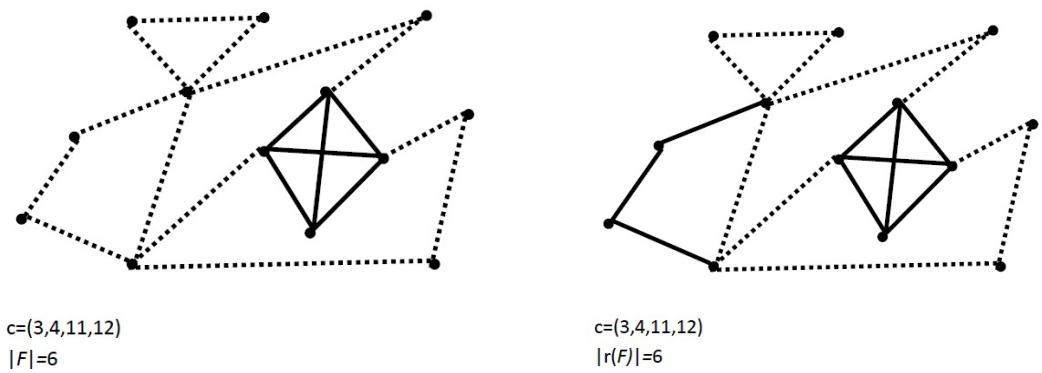
Ebben a fejezetben R. Stephan és J. F. Maurras 2010-ben publikált cikke [2] alapján vizsgáljuk az eredményeket. Legyen adott E véges halmaz, $\mathcal{I}\subseteq 2^E$ a független részhalmazok rendszere, $M=(E,\mathcal{I})$ matroid $r_{\mathcal{I}}(F)$ rangfüggvénnyel, illetve $c=(c_1,..,c_m)$ elemszám előíró vektor. Az elemszám-homogén független halmazok poliédere

$$P^c_{\mathcal{I}}(E)= \text{conv}\{\chi_I\in\mathbb{R}^E\colon I \in \mathcal{I}\cap C(n;c)\},$$

ahol $C(n;c)$ a megengedett elemszámú halmazokat tartalmazza. Célunk megtalálni a $P^c_{\mathcal{I}}$-t leíró egyenlőtlenségrendszert. A továbbiakban feltesszük, hogy $c_m\leq r_{\mathcal{I}}(E)$.
A halmazok elemszámaira vonatkozó megkötés nélkül az $\mathcal{M}=(E,\mathcal{I})$ matroid függetlenjeinek poliéderét le tudjuk írni az alábbi módon:

$$P_{\mathcal{I}}=\{\ x \in \mathbb{R}^E \mid \widetilde{x}(F) \leq r_{\mathcal{I}}(F) \quad \forall\emptyset\neq F\subseteq E, \quad x_e\geq 0 \quad \forall e\in E\ \}.$$

Először megnézünk egy példát, hogy az előző részben tárgyalt egyenlőtlenségrendszer hogy viselkedik matroidok esetén.
A 3. ábrán grafikus matroidot látunk, melyre az előírt elemszámok vektora $c=(3,4,11,12)$.



3. ábra. *Gráfok élein tiltott halmaz egyenlőtlenségek szemléltetése.*

Példaként vizsgáljuk meg, miként módosulhatnak az előző fejezetben leírt CF-egyenlőtlenségek egy olyan általánosabb struktúrán, mint a matroid. A példa után közöljük a tételt és a bizonyítást. A vastag élek részgráfja egy tiltott elemszámú halmaz. Erre felírva az előző fejezetben megfogalmazott CF-egyenlőtlenségeket az alábbit kapjuk $|F|=6$, $c_{f+1}=11$, $c_f=4$ esetén:

$$5\cdot\widetilde{x}(F) - 2\cdot\widetilde{x}(E\backslash F) \leq 5\cdot 4.$$

Mivel a kiválasztott F halmaz rangja 3, minden erdő legfeljebb 3 éllel metsz bele, azaz $\widetilde{x}(F)\leq 3$, $2\cdot\widetilde{x}(E\backslash F) \geq 0$, így a bal oldal legfeljebb $15 < 20$. Tehát nincs olyan megengedett

elemszámú függetlenje a grafikus matroidnak, ami egyenlőséggel teljesítené az egyenlőtlenséget. Módosítanunk kell a CF-egyenlőtlenség formáját, $|F|$-et cseréljük $r_I(F)$-re. Az eddigi egyenlőtlenségek mind érvényesek maradnak, sőt így már léteznek olyan előírt elemszámú erdők, melyekre az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül.

A $P^c_{\mathcal{I}}(E)$ poliédert leíró rendszert így tudjuk megadni:

$$(c_{f+1} - r_I(F))\widetilde{x}(F) - (r_I(F) - c_p)\widetilde{x}(E\backslash F) \leq c_f(c_{f+1} - r_I(F)) \tag{6}$$

$$\forall\ F \in \mathcal{F},\ c_f < |r_I(F)| < c_{f+1},$$

$$\widetilde{x}(E) \geq c_1, \tag{7}$$

$$\widetilde{x}(E) \leq c_m, \tag{8}$$

$$\widetilde{x}(F) \leq r_I(F) \quad \forall \emptyset \neq F \subseteq E, \tag{9}$$

$$x_e \geq 0 \quad \forall e \in E. \tag{10}$$

3.1. Tétel. *A matroid elemszám-homogén függetlenjeinek poliéderét teljesen leírja a (6)-(10) egyenlőtlenségrendszer.*

A $P^c_{\mathcal{I}}(E)$ poliéderes leírásának elemzése során felhasználjuk a matroid csonkoltjának leírását. Bármely k természetes számra $\mathcal{M}'$=(E,$\mathcal{I}'$), $\mathcal{I}'$=$\{I \in \mathcal{I} : |I| \leq$ k $\}$ is matroid, amit $\mathcal{M}$ csonkoltjának nevezünk. $\mathcal{M}'$ független halmazainak poliéderes leírása úgy történik, hogy a $P_{\mathcal{I}}(E)$-t leíró egyenlőtlenségekhez hozzáadjuk még a $\widetilde{x}(E) \leq k$ feltételt. $P_{\mathcal{I}'}(E)$= $P^{(0,1,..,k)}_{\mathcal{I}}(E)$. $\mathcal{M}'$ bázisai az alábbi egyenlőtlenségekkel írhatóak le:

$$\widetilde{x}(F) \leq r_{\mathcal{I}}(F)\ \forall\ \emptyset \neq F \subseteq E,$$

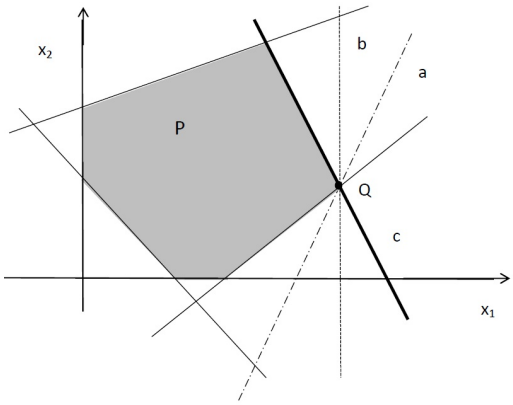
$$\widetilde{x}(E)=k,$$

$$x_e \geq 0\ \forall e \in E\ .$$

A csonkolt matroid poliéderének bázis rendszerén polinomiális idő alatt tudunk optimalizálni a mohó algoritmus segítségével. Tehát a c=(c_1,..,c_m) elemszám vektorhoz tartozó független halmazok konvex burkán egy adott w:$E \mapsto \mathbb{R}$ célfüggvényt maximalizálhatunk a mohó algoritmust legfeljebb $m \leq E$ alkalmazásával.

2.1 Tétel bizonyításvázlata:
$P^c_{\mathcal{I}}(E)$ részhalmaza a (6)-(10) által meghatározott poliédernek, mivel minden egyenlőtlenség igaz a leírni kívánt halmazok incidenciavektoraira. Ezt az előző rész számolásaihoz hasonló módon ellenőrizhetjük, ennek leírásától most eltekintünk. A fordított irányú tartalmazást a

definiált egyenlőtlenségek közötti esetekre bontás során látjuk be.
A továbbiakban segítségünkre lesz az egyenlőtlenségek közötti domináló viszony vizsgálata, a definícióhoz bevezetünk jelöléseket. Egy érvényes $ax \leq a_0$, $a \in \mathbb{R}^E$,$a_0 \in \mathbb{R}$ feltételre nézve az $F \in E$ halmazt feszesnek mondjuk, ha $a\chi_F = a_0$. A $P^c_{\mathcal{I}}$ poliéderre érvényes $ax \leq a_0$ egyenlőtlenséget dominál egy másik érvényes $bx \leq b_0$ egyenlőtlenség, ha $\{x \in P^c_{\mathcal{I}}(E)\colon\ ax = a_0\} \subseteq \{x \in P^c_{\mathcal{I}}(E)\colon\ bx = b_0\}$. Szigorú dominálásról akkor beszélünk, ha a két halmaz között nem áll fent egyenlőség.
A 4. ábrán példát láthatunk domináló egyenlőtlenségekre $\mathbb{R}^2$-ben. Az a és a b egyenes által



4. ábra. *Domináló egyenlőtlenségek*

meghatározott egyenlőtlenségek dominálják egymást P-re nézve, valamint mindkettőt szigorúan dominálja a c egyeneshez tartozó korlát. Mindhárom érvényes P poliéderre nézve, a Q (vagyis az a halmaz, aminek Q az incidenciavektora) feszes a-ra és b-re nézve, a c-re nézve pedig azok a halmazok feszesek, melyeknek incidenciavektora a c egyenesen van.

Célunk, hogy minden $P^c_{\mathcal{I}}(E)$-re érvényes egyenlőtlenséghez találjunk (6)-(10) sorai között egy őt domináló egyenlőtlenséget. Legyen $bx \leq b_0$ egy $P^c_{\mathcal{I}}(E)$-re érvényes egyenlőtlenség, ez alapján osszuk fel az E alaphalmazt 3 csoportba:

$$P := \{e \in E : b_e > 0\},$$

$$Z := \{e \in E : b_e = 0\},$$

$$N := \{\ e \in E : b_e < 0\}.$$

A részhalmazok definíciója miatt $E = P \dot\cup Z \dot\cup N$. Ha $P = Z = N = \emptyset$, akkor $E = \emptyset$, tehát nincs mit bizonyítani. Az együtthatók átalakíthatóak olyan alakba, hogy a $b_0 \in \{-1,0,1\}$. Ez a három eset mentén fogjuk szétbontani a bizonyítást.

1. $b_0 = -1$

   Ha c_1=0, vagyis az üres halmaz is megengedett elemszámú halmaz, akkor $0 \in P^c_{\mathcal{I}}(E)$, ezért 0= $b \cdot 0 \leq$ -1, ez pedig ellentmondás.

   Ha c_1>0, akkor további 3 esetre bontva vizsgálódunk:

   (a) $P=Z=\emptyset$, $N\neq\emptyset$. Tegyük fel, hogy van olyan $I\in\mathcal{I}$ halmaz, hogy $|I|=c_p$ valamely $p\geq$ 2-re és erre a halmazra feszes az egyenlőtlenség. Akkor bármely $J\subset I$ halmazra, melynek elemszáma $|J|=c_1$ fennáll, hogy $\chi_J\in P^c_{\mathcal{I}}(E)$. Ekkor a b_i együtthatók negativitása miatt $b\chi_J > b\chi_I$, viszont I feszessége miatt $b\chi_I=-1$, tehát $b\chi_J > -1$, ami ellentmond annak, hogy J halmaz incidenciavektora eleme a poliédernek. Ezért ha I független, megengedett elemszámú halmaz feszes, akkor $|I|=c_1$. Tehát $bx\leq -1$ egyenlőtlenséget dominálja az $\widetilde{x}(E)\geq c_1$ elemszám korlát.

   (b) $P\cup Z\neq\emptyset$, $N=\emptyset$. Ekkor $by\geq 0$ minden $y\in P^c_{\mathcal{I}}(E)$, viszont a feltételünk szerint a $by \leq -1 = b_0$ érvényes egyenlőtlenség a poliéderre, ez ellentmondás.

   (c) $P\cup Z\neq\emptyset$, $N\neq\emptyset$. Ha $c_1\leq r(P\cup Z)$, akkor van olyan $I\subseteq P\cup Z$ független, c_1 elemszámú halmaz, melyre $b\chi_I\geq 0$, ami ellentmondás. Ezért $c_1 > r(P\cup Z)$. Belátjuk, hogy nincs c_1-nél nagyobb elemszámú feszes halmaz. Indirekt tegyük fel, hogy létezik J feszes halmaz, hogy $|J|=c_p$ ($p\geq 2$). Ha $J\subseteq N$, akkor bármely $K\subset J$, amire $|K|=c_1$ $-1 = b\chi_J < b\chi_K$, ezzel K megsérti a $bx\leq$-1 egyenlőtlenséget. Tehát $J\cap(P\cup Z)\neq\emptyset$. Másrészről $J\cap N\neq\emptyset$, mivel $c_p > c_1 > r(P\cup Z)$. Az $N\cap J$ halmazból bármely $(c_p - c_1)$ darab elemet kivéve kaphatunk olyan független, c_1 elemszámú K halmazt, melynek az incidenciavektora sérti a $bx\leq -1$ feltételt, ami ellentmondás. Így ha az L megengedett elemszámú, független halmaz feszes, akkor $|L|=c_1$. Tehát $bx\leq -1$ egyenlőtlenséget dominálja az $\widetilde{x}(E)\geq c_1$ korlát.

2. $b_0 = 0$.

3. $b_0 = 1$.

A $b_0\in \{0,1\}$ esetben a b_0=0-nál látott megfontolásokhoz hasonlóan végezhetjük a bizonyítás a domináló egyenlőtlenségek meghatározásának folyamatában. Itt nem közöljük ezeket, megtalálhatóak a [2] irodalomban.

4. Elemszám-homogén polimatroid

A matroid elemszám-homogén független halmazainak poliéderes leírása után a [2] cikk szerzői egy újabb lépést tettek a probléma általánosítása irányában. J. F. Maurras, R. Stephan és I. Spiegelberg 2011-ben publikáltak egy cikket az elemszám-homogén polimatroidok leírásáról [3]. Adott E véges, nem üres halmaz, valamint $f\colon 2^E \to \mathbb{R}$ függvény, mely

1. szubmoduláris, azaz $f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B) \quad \forall\ A,B \subseteq E$,
2. nem csökkenő, azaz $\forall\ A \subseteq B \subseteq E$-re $f(A) \leq f(B)$,
3. egészértékű, azaz $f(A) \in \mathbb{Z} \quad \forall\ A \subseteq E$.

Például a matroid rangfüggvénye egy speciális polimatroid-függvény. Az $f\colon 2^E \to \mathbb{R}$ polimatroid-függvény által leírt polimatroid a következő:

$$P_f(E) := \{\ x \in \mathbb{R}^E : \widetilde{x}(U) \leq f(U) \quad \forall\ U \subseteq E,\ x_e \geq 0 \quad \forall\ e \in E\ \}.$$

A $(c_1,\ldots,c_m)$ előírt elemszámvektorhoz tartozó elemszám-homogén polimatroid definíciója a következő:

$$P_f^c(E) := \mathrm{conv}\{\ x \in \mathbb{Z}^E \cap P_f(E) \colon \widetilde{x}(E) = c_p \text{ valamely } p \in \{1,2,..,m\}\text{-re}\ \}.$$

Célunk a $P_f^c(E)$ poliédert leíró lineáris egyenlőtlenségrendszer meghatározása. Hasonlóan az eddig látott leírásokhoz, itt is segítségünkre lesznek a tiltott halmaz egyenlőtlenségek. Az eddigiekhez képest kis módosításra lesz szükség definiálásuk során.
Az elemszám-homogén polimatroidot leíró rendszer a következő:

$$\widetilde{x}(U) \leq f(U) \quad \forall U \subseteq E, \tag{11}$$

$$x(e) \geq 0 \qquad \forall e \in E, \tag{12}$$

$$c_1 \leq \widetilde{x}(E) \leq c_m, \tag{13}$$

$$(c_{p+1}\text{-}c_p)\ \widetilde{x}(U)\ \text{-}\ (f(U)\ \text{-}\ c_p)\ \widetilde{x}(E) \leq c_p\ (c_{p+1}\ \text{-}\ f(U))$$

$$\forall U \subseteq E, ahol \text{ valamely p } \in \{1,2,..,m-1\} olyan, hogy\ c_p < f(U) < c_{p+1}. \tag{14}$$

4.1. Tétel. *A (11)-(14) egyenlőtlenségek rendszere leírja az elemszám-homogén polimatroidot.*

Bizonyítás vázlat: Először 1, utána 2, majd több előírt elemszámra látjuk be, hogy a (11)-(14)-ben definiált rendszer leírja P_f^c-t. Legyen az egy előírt megengedett elemszám $c_1{=}q$. Ez alapján definiáljuk az $f_q(U){:=}\min\{f(U),\ q\}$ csonkolt polimatroid függvényt, mely szintén polimatroid függvény, ha f az. $P_f^{(q)}(E){=}\ \{x{\in}\mathbb{R}^E \mid \widetilde{x}(U) \leq f_q(U)\ (U{\subseteq}E),\ \widetilde{x}(E){=}q,\ x{\geq}0\}$ az f_q határfüggvény által definiált bázispoliéder alkalmas azon halmazok incidenciavektorainak a konvex burkának leírására, melyek elemszáma q.

Két megengedett elemszám esetén jelölje $P_f^{(c_1,c_2)}$ azt a polimatroidot, mely a c_1 és c_2 elemszámú halmazok incidenciavektorainak konvex burka. Legyen P az a poliéder, melyet (a 11), (a 12) és a következő egyenlőtlenségek írnak le:

$$c_1 \leq \widetilde{x}(S){\leq}\ c_2$$

$$(c_2 - c_1)\widetilde{x}(U)\text{-}(f(U)\text{-}c_1)\widetilde{x}(S) \leq c_1(c_2 - f(U)) \quad \forall U \subseteq S, \text{ melyre } c_1 \leq f(U){\leq}\ c_2.$$

$P_f^{(c_1,c_2)} \subseteq P$, ugyanis minden P-t definiáló egyenlőtlenség igaz $P_f^{(c_1,c_2)}$-re. A (a 11) és a (a 12) egyenlőtlenségek P_f^c-t határozzák még, $P_f^{(c_1,c_2)} \subseteq P_f^c$, tehát igazak $P_f^{(c_1,c_2)}$-re is, valamint $\widetilde{x}(S)$-re felírt elemszám korlát is teljesül. A tiltott halmaz egyenlőtlenségek $P_f^{(c_1)}$-re és $P_f^{(c_2)}$-re is teljesülnek, és mivel $P_f^{(c_1,c_2)}$ ezen poliéderek egész pontjainak a konvex burka, rá is teljesül.

Még azt kell megmutatni, hogy $P{=}P_f^{(c_1,c_2)}$. Megjegyezzük, hogy az $\widetilde{x}(U){\leq}\ f(U)$ egyenlőtlenség $f(U){\geq}\ c_2$ esetén redundáns. A P poliéderhez definiálunk egy lineáris célfüggvényt és tekintjük a primál és duál feladatot. A primál feladat optimális megoldása mohón meghatározható, a két bázispoliéder optimális megoldásai közül a nagyobb célfüggvényértékűt választjuk. Belátjuk, hogy ennek az értéke megegyezik a duál feladat megoldásával. Így $P_f^{(c_1,c_2)} \subseteq P$. A szerzők megemlítik, hogy a bizonyítás azért működik, mert a $\max\{w^{\mathsf{T}}x \mid x{\in}P_f^{(c_1)}\}$ és a $\max\{w^{\mathsf{T}}x \mid x{\in}P_f^{(c_2)}\}$ lineáris programozási feladatokban a poliédereknek közös optimális duál bázisuk van. Ez fontos megfigyelés, ugyanis látni fogjuk a következő részben, hogy a leírás érvényességének feltételét meg lehet e mentén fogni.

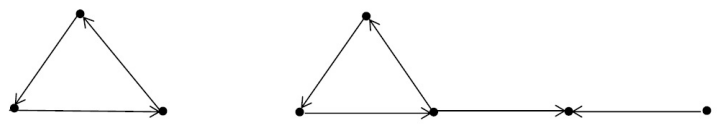
Több elemszám esetén jelölje P a (11)-(14) egyenlőtlenségek által definiált poliédert. Célunk belátni, hogy $P{=}P_f^c$. Az előző részekhez hasonló átalakításokkal belátható, hogy $P_f^c \subseteq P$. A fordított irányú tartalmazás belátását az $m \geq 2$ lehetséges elemszámú esetén visszavezetjük a két elemszámú esetre. A P poliéder minden $x \in \mathbb{R}^E$ pontjára $\widetilde{x}(S){\in}\ [c_p, c_{p+1}]$ valamely $p \in \{1, \ldots, m-1\}$-re. Ekkor mivel x kielégíti a két elemszámnál meghatározott feltételeket, $x \in P_f^{(c_p,c_{p+1})}$. Ezért aztán $x \in P_f^c$, ugyanis $P_f^{(c_p,c_{p+1})} \subseteq P_f^c$.

A cikk íróiban felmerült a kérdés, hogy két elemszám-homogén polimatroid metszetéről mit tudunk elmondani. Ahogy az elemszám korlát nélküli esetben igaz az, hogy ha az $\mathcal{I}$ halmazrendszer az $\mathcal{I}_1$ és az $\mathcal{I}_2$ független halmazrendszerek metszeteként áll elő, akkor a hozzájuk tartozó matroid poliéderekre igaz, hogy

$$conv\{\ \chi_I : I \in \mathcal{I}\ \}{=}\ P_{r_1}(E) \cap P_{r_2}(E),$$

ha az r_i az $\mathcal{I}_i$-hez tartozó matroid rangfüggvény (i=1,2). Ez polimatroidokra is igaz. Kiderül azonban, hogy az elemszám-homogén esetben ez nem igaz.
Ellenpélda egy irányított gráf fenyveseinek a karakterisztikus vektorainak konvex burka (branching politóp). Adott D=(V, A) digráfban a fenyves olyan erdő, amelyben minden csúcs befoka legfeljebb 1, incidenciavektoraik konvex burkát $P_b(A)$-val jelöljük, az elemszám-homogén poliéderét pedig $P_b^c(A)$-vel. Két matroid metszeteként tudjuk előállítani a digráf fenyveseit, melyek a grafikus matroid $\mathcal{M}_1$= $\{F \subseteq A|\ F$ erdő $\}$ és a partíciós matriod $\mathcal{M}_2$= $\{B \subseteq A||B \cap \delta(v)| \leq 1\ \forall v \in V\}$. Az előbb definiált matroidok rangfüggvényeit r_i-vel jelölve (i=1,2) azt kapjuk, hogy $P_b(A) = P_{r_1}(A) \cap P_{r_2}(A)$.

Tekintsük az 5. ábrán látható D=(V, A) digráfot. Legyen x_a=$\frac{1}{2}$ $\forall a \in A$. Ekkor $x \in P_{r_1^{(2,6)}}(A)$ és $x \in P_{r_2}^{(2,6)}(A)$, tehát $x \in P_{r_1^{(2,6)}}(A) \cap P_{r_2^{(2,6)}}(A)$, de $x \notin P_b^{(2,6)}(A)$, ugyanis a P_b^6 üres.



5. ábra. *D=(V,A) irányított gráf*

Az elemszám-homogén polimatroidok metszetét jelöljük $P_{f_1 \cap f_2}^{(c_1,c_2)}(E)$= conv$\{$ $x \in \mathbb{Z}^E \cap P_{f_1}^{c_1}(E)$ $\cap P_{f_2}^{c_2}(E)$: $x(E)$=c_p valamely p-re$\}$. Mivel a branching politop matroid politop,

$$P_{f_1 \cap f_2}^c(E) \neq P_{f_1}^c(E) \cap P_{f_2}^c(E).$$

A szerzők azt sejtették, hogy a két polimatroidfüggvényt alkalmasan összefésülve tudnak gyártani egy olyan f polimatroidfüggvényt, melyre felírva a fent definiált lineáris rendszert leírható lesz az elemszám-homogén metszet polimatroid. A szakirodalmat figyelemmel kísérve egy év múlva kiderül, hogy nem mindig írható le a fenti rendszerrel az elemszám-homogén polimatroidok metszete és a duál optimális bázis létezése egy jó feltétel a leírás érvényességének vizsgálatához.

5. Duál konzisztens lineáris egyenlőtlenségrendszerek és elemszám-homogén halmazok poliéderei

S. Fujishige és J. Massberg 2011 decemberében publikáltak az elemszám-homogén halmazok poliédereinek leírásával kapcsolatban [4]. A cikkben az előző fejezetekben bemutatott megfigyeléseket és tételeket általánosítják. Megfogalmaznak egy feltételt arra vonatkozóan, hogy egy lineáris egyenlőtlenségrendszer mikor írja le az elemszám-homogén halmazok incidenciavektorainak konvex burkát. Ehhez megismertetik a duál konzisztencia fogalmát. Ebben a részben ezeket az eredményeket vizsgáljuk.

Először két előírt elemszám esetével foglalkozunk, később ezt általánosítjuk több elemszámra. Legyen E véges, nem üres halmaz. Tekintsük az E részhalmazain értelmezett $f_i{:}2^E\to\mathbb{R}$ (i=1,2) függvényeket. Legyenek az előírt elemszámok $c_1{:=}f_1(E) < f_2(E) ={:}c_2$.
Definiáljuk az f_i függvényhez és a c_i elemszámhoz tartozó poliédert az alábbi módon:

$$P_{f_i}^{c_i}{:=}\{\ x \in \mathbb{R}^E \mid \widetilde{x}(U) \leq f_i(U) \quad \forall\ U \subseteq E \text{ és } \widetilde{x}(E){=}c_i\ \} \qquad (i{=}1{,}2).$$

Célunk a $P_{f_1}^{c_1} \cup P_{f_2}^{c_2}$ konvex burkának leírása. A továbbiakban feltételt adunk arra, hogy az alábbi egyenlőtlenségrendszer mikor írja le az unió konvex burkát:

$$(c_2 - c_1)\widetilde{x}(U) - (f_2(U) - f_1(U))\widetilde{x}(E) \leq c_2 f_1(U) - c_1 f_2(U) \qquad (U \subseteq E), \tag{15}$$

$$c_1 \leq \widetilde{x}(E) \leq c_2 \tag{16}$$

Ez a feltétel az egyenlőtlenségek duál konzisztenciája, amit a következő részben tárgyalunk.

5.1. Megfigyelés. *Ha a (15) és (16) egyenlőtlenségekhez hozzáadjuk az* $\widetilde{x}$(E)=c_i *feltételt, akkor az* $\{\widetilde{x}$(U)$\leq f_i$(U) (U$\subseteq$E), $\widetilde{x}$(E)=$c_i\}$ *rendszerrel ekvivalens leírást kapunk, ami definíció szerint meghatározza a* $P_{f_i}^{c_i}$ *poliédert.*

5.1. Duál konzisztens lineáris egyenlőtlenségrendszerek

Definiálunk a $P_{f_i}^{c_i}$ (i=1,2) poliéderekhez egy $w\in\mathbb{R}^E$ vektort. Tekintsük a következő P_i^w lineáris optimalizálási problémát:

$$max\{wx|\ x \in P_{f_i}^{c_i}\}. \tag{17}$$

Legyen x_i^* optimális megoldása a P_i^w-nek (i=1,2). Bevezetjük az aktív egyenlőtlenségek reprezentálására x_i^*-hoz a következő halmazt:

$$\mathcal{A}_i(x_i^*) = \{\chi_U \in \mathbb{R}^E | \widetilde{x_i}^*(U) = f_i(U)\} \qquad (i = 1, 2). \tag{18}$$

A P_i^w probléma duál optimális bázisának nevezzük a $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^E$ halmazt (i=1,2), ha létezik P_i^w-nek olyan x_i^* optimális megoldása, hogy

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_i(x_i^*), \tag{19}$$

$$rang(\mathcal{B}) = |E|. \tag{20}$$

Ezek alapján elmondhatjuk, hogy x_i^* egyértelmű megoldása az $\widetilde{x}(U)=f_i(U)$, $(U \subseteq E)$ egyenletrendszernek. A továbbiakban feltehetjük, hogy χ_E eleme a $\mathcal{B}$ optimális duál bázisoknak.

5.1. Definíció. *Az $\{\widetilde{x}(U) \leq f_i(U), \widetilde{x}(E)= c_i\}$ (i=1,2) lineáris egyenlőtlenségrendszerek* duál konzisztensek*, ha minden $w \in \mathbb{R}^E$ esetén létezik közös $\mathcal{B}$ optimális duál bázisa P_1^w-nek és P_2^w-nek.*

A duál konzisztencia függ c_i (i=1,2) megválasztásától. Duál konzisztens egyenlőtlenség- rendszerek például az f_1,f_2 szubmoduláris függvényekhez tartozó egyenlőtlenségekrendszerek. A következőkben a rövidség kedvéért azt mondjuk az egyenlőtlenségrendszerek duál konzisztenciájára hivatkozva, hogy (f_1, f_2) pár duál konzisztens.

5.2. Elemszám-homogén halmazok konvex burkának leírása két előírt elemszám esetén

Ebben a részben azt az esetet ismertetjük, amikor olyan halmazok konvex burkát szeretnénk leírni, amelyek elemszáma két előírt elemszám valamelyikével egyezik meg. A következő részben általánosítjuk több lehetséges előírt elemszám esetére.
Legyen $\widehat{P}$ az a poliéder, amit az alábbi egyenlőtlenségrendszer ír le:

$$(c_1 - c_2)\widetilde{x}(U) - (f_1(U) - f_2(U))\widetilde{x}(E) \leq c_2 f_1(U) - c_1 f_2(U) \qquad (U \subseteq E) \tag{21}$$

$$c_1 \leq \widetilde{x}(E) \leq c_2. \tag{22}$$

Jelölje $P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2}$ a $P_{f_1}^{c_1}$ és $P_{f_2}^{c_2}$ poliéderek uniójának konvex burkát. A következőkben belátjuk, hogy $P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2}=\widehat{P}$ akkor és csak akkor, ha a (f_1, f_2) pár duál konzisztens. A bizonyításhoz felhasználjuk a következő végtelen sok egyenlőtlenségből álló rendszert, ahol ζ_i^w-vel jelöljük a P_i^w feladat optimális célfüggvényértékét:

$$(c_2 - c_1)\sum_{e \in E} w(e)x(e) - (\zeta_2^w - \zeta_1^w)\widetilde{x}(E) \leq c_2\zeta_1^w - c_1\zeta_2^w \qquad (\forall\ w \in \mathbb{R}^E). \tag{23}$$

5.1. Állítás. *Ha minden $w \in \mathbb{R}^E$ és $x \in \widehat{P}$ esetén (23) fennáll, akkor az (f_1,f_2) pár duál konzisztens.*

Bizonyítás: A (23)-beli egyenlőtlenségek olyan hipersíkokat határoznak meg, melyek $P_{f_1}^{c_1}$-t és $P_{f_2}^{c_2}$-t is támasztják. Tehát a $c_1 \leq \widetilde{x}(E) \leq c_2$ és (23) együtt meghatározzák a $P_{f_1}^{c_1} \cup P_{f_2}^{c_2}$ konvex burkát. A feltétel miatt $\widehat{P} \subseteq P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2}$, az 5.1 miatt pedig $P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2} \subseteq \widehat{P}$, tehát $\widehat{P} = P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2}$.
Elegendő megmutatni egy tetszőleges generikus $w \in \mathbb{R}^E$ vektorra a duál konzisztenciát. A P_i^w $(i=1,2)$ probléma egyértelmű x_i^* megoldása megegyezik a $P_{f_i}^{c_i}$ polidéder egy csúcsával, és $\widehat{P} = P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2}$ valamint az optimális megoldás egyértelműsége miatt $i=1,2$-re ezek $\widehat{P}$ két szomszédos csúcsai lesznek. Ebből következik, hogy létezik közös optimális duál bázisa a P_i^w $(i=1,2)$ problémáknak minden $w \in \mathbb{R}^E$-re.

5.2. Állítás. *Minden duál konzisztens (f_1,f_2) párra, melyre $f_1(\mathrm{E}=c_1<c_2=f_2(\mathrm{E})$, (21) és (22) leírják $P_{f_1}^{c_1}$ és $P_{f_2}^{c_2}$ konvex burkát.*

Bizonyítás: Az 5.1 miatt $P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2} \subseteq \widehat{P}$. Indirekt tegyük fel, hogy $P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2} \neq \widehat{P}$. Ekkor a $\widehat{P}$ poliédernek van egy olyan L éle, mely az x_1 és x_2 csúcsokat köti össze, és $x_1 \in \widehat{P} \setminus P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2}$, x_2 pedig valamelyik $P_{f_i}^{c_i}$-nek a csúcsa $(i = 1, 2)$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_2 \in P_{f_2}^{c_2}$. Legyen az L élet definiáló támasztó hipersík egyenlete $wx=b$ $(w,x \in \mathbb{R}^E,\ b \in \mathbb{R})$. Ekkor az x_2 a P_2^w probléma egyértelmű optimális megoldása. Legyen y_1 a P_1^w probléma optimális megoldása. Feltehetjük, hogy w-t generikusan választjuk, így y_1 egyértelmű. Az állítás feltétele miatt létezik $\mathcal{B}$ közös duál optimális bázisa a két problémának. Az 5.1 Megfigyelés miatt x_2 és y_1 a $\widehat{P}$ poliéder azon oldalán fekszenek, amit a $\widehat{P}$-t definiáló (15) egyenlőtlenségek közül a $\chi_U \in \mathcal{B}$ által egyenlőséggel teljesítető sorok határoznak meg. Emiatt x_2 és y_1 egy L' élén fekszenek, így az x_1 csúcs megegyezik az y_1 csúccsal, ellentmondva az indirekt feltevésnek.

5.3. Állítás. *Ha $\widehat{P} = P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2}$, akkor (23) teljesül minden $x \in \widehat{P}$-ra.*

Bizonyítás: A tétel következik abból, hogy $P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2}$-et leírják a (23) egyenlőtlenségei és a $c_1 \leq \widetilde{x}(E) \leq c_2$ egyenlőtlenség.

5.1. Tétel. *Az előző állításokat összefoglalva az alábbi három állítás ekvivalens:*

1. $\widehat{P} = P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2}$.
2. *Minden $x \in \widehat{P}$-ra teljesülnek a (23)-beli egyenlőtlenségek.*
3. *Az (f_1,f_2) pár duál konzisztens.*

5.3. Elemszám-homogén halmazok konvex burkának leírása több előírt elemszám esetén

Eddig kétféle, c_1 és c_2 elemszámú halmazok konvex burkának leírásával foglalkoztunk. Most adott $(c_1,..,c_m)$ előírt elemszám vektor, $c_1<c_2<..<c_m$ és f_i: $2^E \to \mathbb{R}$ $(i=1,..,m)$. Feltesszük, hogy minden (f_i,f_{i+1}) pár duál konzisztens $(i=1,..,m\text{-}1)$. Ez nem azt jelenti, hogy minden (f_i,f_j) $(i=1,..,m,\ j\neq i\text{-}1,i,i+1)$ pár duál konzisztens, ugyanis a duál konzisztencia nem tranzitív reláció. Célunk $P^{c_1}_{f_1}\cup P^{c_2}_{f_2}\cup..\cup P^{c_m}_{f_m}$ konvex burkának leírása, amit a továbbiakban $P^{c_1,c_2,..,c_m}_{f_1,f_2,..,f_m}$-vel jelölünk. A legáltalánosabb esetben, amikor a $P^{c_1,c_2,..,c_m}_{f_1,f_2,..,f_m}$ azon pontjaira, melyre $\widetilde{x}(E)=c_i$ nem feltétlenül érvényes az $\widetilde{x}(U)\leq f_i(U)$ egyenlőtlenség, nehéz lenne az unió konvex burkára érvényes egyenlőtlenségrendszer meghatározni. Ezért a továbbiakban feltételezzük, hogy

$$P^{c_1,c_2,..,c_m}_{f_1,f_2,..,f_m} \cap \{x \in \mathbb{R}^E | \widetilde{x}(E) = c_i\} = P^{c_i}_{f_i} \qquad (i = 1,..,m) \tag{24}$$

Azt is feltesszük, hogy a $P^{c_i}_{f_i}$ poliédert leíró rendszer minden egyenlőtlensége meghatározza egy oldalát a poliédernek $(i=1,..,m)$.
A 24 feltétel miatt

$$P^{c_1,c_2,..,c_m}_{f_1,f_2,..,f_m} = \cup_{i=1,..,m-1}\mathrm{conv}\{P^{c_i}_{f_i}, P^{c_{i+1}}_{f_{i+1}}\} \tag{25}$$

A$\widehat{P}^{c_1,c_2,..,c_m}_{f_1,f_2,..,f_m}$ poliédert az alábbi egyenlőtlenségrendszer írja le:

$$(c_{i+1} - c_i)\widetilde{x}(U) - (f_{i+1}(U) - f_i(U))\widetilde{x}(E) \leq c_{i+1}f_i(U) - c_i f_{i+1}(U), \tag{26}$$

$$U \subseteq E, i = 1, \ldots, m-1,$$

$$c_1 \leq \widetilde{x}(E) \leq c_m. \tag{27}$$

Minden $U\subseteq E$ részhalmazhoz és $i\in\{1,\ldots,m\}$-hez tartozó (26)-beli egyenlőtlenség az oldaldefiniáló feltétel és 5.1 Tétel miatt támasztja a $P^{c_i}_{f_i}$, $P^{c_{i+1}}_{f_{i+1}}$ és $\mathrm{conv}(P^{c_i}_{f_i}\cup P^{c_{i+1}}_{f_{i+1}})$ poliédereket. Valamint a (24) és a $P^{c_1,c_2,\ldots,c_m}_{f_1,f_2,\ldots,f_m}$ poliéder konvexitása miatt minden ilyen egyenlőtlenség érvényes a többi $P^{c_j}_{f_j}$ $(j \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i,\ i{+}1\})$ poliéderre is. Ezekből a megállapításokból következik az alábbi tétel:

5.2. Tétel. *A fent leírt feltételek esetén a következő két állítás ekvivalens.*

1. $P^{c_1,c_2,..,c_m}_{f_1,f_2,..,f_m} = \widehat{P}^{c_1,c_2,..,c_m}_{f_1,f_2,..,f_m}$.

2. *Az (f_i,f_{i+1}) függvények duál konzisztensek $i = 1, \ldots, m-1$.*

5.4. Példa 1: Elemszám-homogén polimatroidok

A korábban bemutatott szakirodalomban tárgyalt elemszám-homogén polimatroidok esete példaként hozható a fent megfogalmazott rendszerre. Az úgynevezett tiltott halmaz egyenlőtlenségek levezethetőek a (26) egyenlőtlenségekből.
Legyen E véges halmaz, $f{:}2^E\to\mathbb{R}^+$ polimatroid rangfüggvény, $(c_1,\ldots,c_1)$ az előírt elemszám vektor, ahol $0\le c_1<..<c_m\le f(E)$. Definiálunk m darab függvényt, melyek az f polimatroid függvény csonkoltjai, $f_i(U){:=}\min\{c_i,f(U)\}$ $(U\subseteq E)$. Tudjuk, hogy a csonkolt rangfüggvény is polimatroid függvény. Az így elkészített függvények szubmodularitásuk miatt páronként duál konzisztensek. Teljesülnek rájuk a 5.2 Tétel feltételei, így a (26) és (27) egyenlőtlenségeinek rendszere leírja a $P_{f_i}^{c_i}$ $(i{=}1,..,m)$ poliéderek uniójának konvex burkát. A (26) egyenlőtlenségek az alábbi formában is írhatóak:

$$(c_{i+1}-c_i)\widetilde{x}(U)-(f_{i+1}(U)-f_i(U))\widetilde{x}(E)\le c_{i+1}f_i(U)-c_if_{i+1}(U)\qquad (U\subseteq E, i=1,..,m-1). \tag{28}$$

Valamely $i\in\{1,..,m\text{-}1\}$-re és $U\subseteq E$-re, ahol $c_i\le f(U)\le c_{i+1}$, azt kapjuk, hogy $f_i(U){=}c_i$ és $f_{i+1}(U){=}f(U)$. Tehát az egyenlőtlenségeket a korábban tárgyalt alakban kapjuk vissza:

$$(c_{i+1}-c_i)\widetilde{x}(U)-(f(U)-c_i)\widetilde{x}(E)\le c_i(c_{i+1}-f(U)). \tag{29}$$

A (28) egyenlőtlenségeknél a $c_{i+1}<f(U)$ esetben $f_{i+1}(U){=}c_{i+1}$, így a $0\le\widetilde{x}(E\setminus U)$. Amikor pedig $c_i>f(U)$, akkor $f_i(U)=f(U)=f_{i+1}(U)$, $\widetilde{x}(U)\le f(U)$ egyenlőtlenségeket kapjuk.

5.5. Példa 2: Elemszám-homogén párosítások páros gráfban

Ebben a részben az elemszám-homogén párosítások leíró rendszerét mutatjuk be páros gráfban. A fent leírt módszert alkalmazva az egyenlőtlenségrendszer generálására kiderül, hogy ebben az esetben két előírt elemszám által meghatározott lineáris egyenlőtlenségek rendszere nem duál konzisztens. Azt is megmutatjuk, hogyan tudjuk duál konzisztenssé tenni az egyenlőtlenségrendszereket.

Adott $G{=}(S,T;E)$ páros gráf, $V{=}S\cup T$ a csúcsok halmaza, E az élek halmaza. Jelöljük $d(v)$-vel a v-re illeszkedő élek számát, $N(v)\subset V$-vel a v csúcs szomszédainak halmazát $(v\in V)$. Legyen $w\in\mathbb{R}^E$ generikusan választott, éleken értelmezett súlyfüggvény. Legyenek a $c_i\in\mathbb{Z}^+(i{=}1,2)$, $c_1<c_2$ előírt elemszámok úgy, hogy létezik legalább egy olyan $M\subseteq E$ párosítás G-ben, hogy

$|M|$=c_2. Tekintsük a maximális súlyú előírt elemszámú párosítások problémáját, amelynek a relaxáltját az alábbi egyenlőtlenségek $\mathbf{P}_i^w$ rendszere írja le:

$$max \sum_{e \in E} w(e)x(e) \tag{30}$$

$$\sum_{e \in N(v)} x(e) \leq 1 \quad \forall v \in V,$$

$$0 \leq x(e) \leq 1 \quad \forall e \in E,$$

$$\widetilde{x}(E) = c_i.$$

Jelölje $\widehat{x}_i$ a $(\mathbf{P}_i^w)$ probléma optimális megoldását, mely a súlyvektor generikus választása miatt egyértelmű. Mivel a (30) rendszer által leírt poliéder egész, van olyan $M_i \subseteq E$ párosítás i=1,2-re, melyre $\widehat{x}_i = \chi_{M_i}$.

Tekintsük a két probléma optimális párosításait, M_1-et és M_2-t. Ezek szimmetrikus differenciája $M_1 \Delta M_2 = (M_1 \backslash M_2) \cup (M_2 \backslash M_1)$ csúcsdiszjunkt utak és körök uniója, melyek M_1 és M_2 élein alternálnak. Az optimális megoldás egyértelműsége miatt nem tartalmaz páros utat vagy kört. Páros gráfban nincs páratlan kör, így elég az utakat vizsgálnunk. Ezeket a páratlan hosszú alternáló utakat a továbbiakban Q^k-val, éleiket pedig $E(Q^k)$-val fogjuk jelölni (k=1,..,l). Az alábbi összefüggések közül pontosan az egyik igaz a párosításban az alternáló utakbeli élek számára:

$$|M_2 \cap E(Q^k)| = |M_1 \cap E(Q^k)| + 1, \tag{31}$$

$$|M_2 \cap E(Q^k)| = |M_1 \cap E(Q^k)| - 1. \tag{32}$$

Azon Q^k utak száma, melyre az első egyenlet igaz, legyen $a \in \mathbb{N}$, a második összefüggésnek $b \in \mathbb{N}$ darab alternáló út felel meg. Így $l = a + b$, valamint $a - b = c_2 - c_1 > 1$. Azt állítjuk, hogy b=0. Indirekt tegyük fel, hogy $b \geq 1$. Ekkor ha egy olyan Q^i utat, melyre az első egyenlőség igaz és egy olyan Q^j utat, melyre a második igaz együtt vizsgálnánk, akkor uniójukban ugyanannyi M_1-beli él van, mint M_2-beli, ez viszont ellentmond az optimális megoldás egyértelműségének. Tehát b=0 és $a = c_2 - c_1 = l$.

Minden Q^k út belső pontjait jelölje $\overline{V}(Q^k)$. A (30) rendszerek $(i = 1, 2)$aktív egyenlőtlenségei az alábbiak:

1. Minden $e \in M_1 \cap M_2$-re $x(e)$=1.
2. Minden $e \in E \backslash (M_1 \cup M_2)$-re $x(e)$=0.
3. Minden k=1,..,c_2-c_1-re:

$$\sum_{e \in N(v)} x(e) = 1 \qquad (v \in \overline{V}(Q^k)). \tag{33}$$

A harmadik pontban szereplő egyenlőségek száma $|\overline{V}(Q^k)|=|E(Q^k)|$-1. Az első és második pontbeli egyenlőségek mindig hozzávehetőek a duál bázishoz, az egyszerűbb áttekinthetőség kedvéért törölhetjük az $M_1 \cap M_2$-beli és az $E \backslash (M_1 \cup M_2)$-beli éleket G-ből.
Így a továbbiakban $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ és $E=M_1 \cup M_2$. Ha $c_2-c_1=1$, akkor $M_1 \Delta M_2$ egy alternáló út. Azt tapasztaljuk, hogy a fenti három pontban megfogalmazott egyenlőségek plusz az elemszám korlát összesen pontosan $|E|$ darab feltételt ad, mely egyértelműen meghatározza az optimális $\widehat{x}_i$ megoldást (i=1,2). Tehát (P_1^w)-nek és (P_2^w)-nek van közös optimális duál bázisa, azaz a két poliéder duál konzisztens. Ebben az esetben a (30) rendszer leírja a két poliéder konvex burkát az utolsó egyenlőtlenséget $c_1 \leq \widetilde{x}(E) \leq c_2 = (c_1+1)$ -re cserélve.
Abban az esetben, ha $c_2-c_1 \geq 2$, legalább 2 út van $M_1 \Delta M_2$-ban, ami miatt a közös aktív egyenlőtlenségek száma legfeljebb $|E|-2$. Így az elemszám korlát hozzávételével sem lehet közös optimális duál bázisa a két rendszernek, azaz nem duál konzisztensek a P_i^w poliéderek.

Ilyenkor szükségünk arra, hogy új, redundáns egyenlőtlenségeket adjunk hozzá a P_i^w-t leíró rendszerhez (i=1,2), hogy meg tudjuk határozni a $P_{f_1,f_2}^{c_1,c_2}$ konvex burkot. Ezek az egyenlőtlenségek lehetnek a (23) szerinti alakban. Jelölje az élek bármely $F \subseteq E$ részhalmazában a maximális élszámú párosítás elemszámát $\sigma(F)$. Legyen $e^{(k)}$ egy M_2-beli él Q^k-ban k=1,...,c_2-c_1. Az $M=M_1 \cup M_2$ párosításban a legnagyobb párosítás elemszáma $\sigma(M)=|M_2|=c_2>c_1$. Tekintsük minden k=1,...,c_2-c_1-re $M \backslash e^{(k)}$-t, melyben a maximális párosítás elemszáma megegyezik $M_2 \backslash e^{(k)}$ éleinek számával, ami $\sigma(M_2 \backslash e^{(k)})=c_2-1$ élet jelent.

Így ha a (30) rendszerhez hozzáadjuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$\sum_{e \in M \backslash e^{(k)}} x(e) \leq c_1, \tag{34}$$

P_1^w-re érvényes rendszert kapunk, ami $x=\chi_{M_1}$-re egyenlőséggel teljesül, valamint

$$\sum_{e \in M \backslash e^{(k)}} x(e) \leq c_2 - 1, \tag{35}$$

érvényes P_2^w-re és $x=\chi_{M_2}$-re egyenlőséggel teljesül. Megjegyezzük, hogy az előző harmadik pontbeli egyenlőtlenségek lineárisan függetlenek a (34) és (35)-től, mert $c_2-c_1 \geq 1$. A (34) egyenlőtlenségeket P_1^w-hez adva és a (35) sorokat P_2^w-hez adva lesz közös optimális duál bázisa a két poliédernek.

Bármely generikus w súlyvektor meghatároz optimális M_i párosítást P_i^w-ben (i=1,2). A P_i^w (i=1,2) egyenlőtlenségrendszerei duál konzisztenssé tehetőek a fent leírt módon. A nem generikus súlyvektoroknál az optimális párosítás ugyan nem feltétlenül egyértelmű, mindig található olyan M_1 és M_2 pár, melyekhez új egyenlőtlenségeket megfogalmazva lesz közös optimális duál bázisa P_1^w és P_2^w poliédereknek.

6. A bi-lexikus rendezés

6.1. A bi-lexikus rendezés fogalma és tulajdonságai

Ebben a részben bevezetjük a bi-lexikus rendezés fogalmát A. Lubiw munkája [6] alapján. Ezt a rendezést olyan mátrixok esetében definiáljuk, melyek elemei egy teljesen rendezett halmaz elemei. Az ilyen mátrixok bi-lexikus rendezésében a sor- és oszlopvektorok lexikografikusan nemcsökkenő sorrendben követik egymást. A vektorok lexikografikus rendezésénél a megszokottól eltérően az elemek összehasonlítását a vektorok legnagyobb koordinátájú elemeitől kezdjük, így haladva a kisebb koordinátájú elemek felé. Tehát egy bi-lexikusan rendezett mátrixban az oszlopvektorok elemeit alulról felfelé olvasva, míg a sorvektorokat jobbról balra olvasva lexikografikusan nemcsökkenő sorrendben követik egymást a bi-lexikusan rendezett mátrixban.

6.1. Tétel. *Minden mátrixnak van bi-lexikus rendezése.*

A tétel belátásához definiálunk egy segédvektort. Az $m \times n$-es Q mátrixhoz tartozó $p(Q)$ vektor a Q mátrix elemeit tartalmazza sor- és oszlopindexük összege alapján rendezve. Tehát a $Q(i,j)$ elemek $i+j$ alapján, azon belül j szerint vannak növekvő sorba rendezve.
$p(Q)=(Q(1,1),Q(2,1),Q(1,2),Q(3,1),\ldots,Q(m,n))$.

6.1. Megfigyelés. *Két lexikografikusan csökkenő, azaz a bi-lexikus rendezés szempontjából nem jó sorrendben lévő sorvektor* [*oszlopvektor*] *cseréje a p(Q) vektort lexikografikusan növeli.*

Bizonyítás: Legyenek $k<\ell$ a Q mátrix két sorának indexei úgy, hogy az ${}_{\ell}q$ sorvektor lexikografikusan kisebb, mint a ${}_{k}q$. Legyen j az a legnagyobb oszlopindex, ahol a két vektor eltér, azaz $Q(k,j)\neq Q(\ell,j)$. Mivel ${}_{\ell}q$ lexikografikusan kisebb, mint ${}_{k}q$, $Q(k,j)>Q(\ell,j)$. A csere után a segédvektorban az $\ell+j$ a legnagyobb koordináta, ahol változás lesz, mégpedig $p'(Q)(\ell+j) = p(Q)(k+j)>p(Q)(l+j)$, így a segédvektor lexikografikusan növekedni fog. A szimmetria miatt hasonló érvelés működik az oszlopok esetében is. □

A 6.1 Tétel bizonyítása: A 6.1 Megfigyelés miatt a Q mátrixnak az a rendezése, amely a $p(Q)$ vektort lexikografikusan maximalizálja, bi-lexikus rendezése a Q mátrixnak. □

Egy rendezett 0-1 mátrixban a következő tulajdonság ekvivalens azzal, hogy a mátrix oszlopvektorai lexikografikusan növekvő sorrendben vannak: bármely r sorhoz, melynek a k. oszlopában 1, ℓ. oszlopában 0 szerepel és $k<\ell$, létezik olyan $s>r$ sor, melynek k. oszlopában 0, ℓ. oszlopában 1 szerepel.

A továbbiakban megnézzük a szimmetrikus mátrixok bi-lexikus rendezhetőségének tulajdonságait. A Q mátrix szimmetrikus, ha sor- és oszlopindexei ugyanabból az S halmazból kerülnek ki és $Q(s,t)=Q(t,s)$ $\forall s,t\in S$. Az ilyen mátrixoknál S rendezését a mátrix szimmetrikus rendezésének nevezzük. Az nem igaz, hogy minden szimmetrikus mátrixnak van szimmetrikus bi-lexikus rendezése. Például a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixnak nincs szimmetrikus bi-lexikus rendezése, mert a jobb alsó sarokban mindenképp 1-nek kell lennie, az pedig csak $Q(1,2)$ vagy $Q(2,1)$ lehet.

A Q szimmetrikus mátrixnak van domináns diagonálisa, ha $Q(s,s)\geq Q(s,t)$ $\forall$ $s,t \in S$.

6.2. Tétel. *Ha egy szimmetrikus mátrixnak van domináns diagonálisa, akkor van szimmetrikus bi-lexikus rendezése.*

Bizonyítás: A domináns diagonálisú szimmetrikus mátrixnál két nem jó sorrendben lévő oszlop cseréje az ugyanazon indexű sorokat lexikografikusan csökkenő sorrendben hagyja. Ezért az azonos indexű, csökkenő sorrendben lévő sorok és oszlopok egymásutáni cseréje együtt lexikografikusan növeli a $p(Q)$ segédvektort. Tehát Q-nak az a szimmetrikus rendezése, amely $p(Q)$-t lexikografikusan maximalizálja, biztosan szimmetrikus bi-lexikus rendezése lesz a mátrixnak. $\square$

Szimmetrikus mátrixoknál elégséges, de nem szükséges feltétel a domináns diagonális létezése a szimmetrikus bi-lexikus rendezés létezéséhez. Gyakorlati szempontból hasznos számunkra a 6.2 Tétel a gráfokhoz definiált szomszédsági mátrixok vizsgálata során. A $G=(V,E)$ gráf szomszédsági mátrixa az a szimmetrikus 0-1 mátrix, melynek sor- és oszlopindexei a gráf csúcsainak felelnek meg és $Q(u,v)=1$ $(u,v\in V)$, ha u és v csúcsok megegyeznek vagy szomszédosak, különben $Q(u,v)=0$. Egy gráf lexikus rendezésének a csúcsok olyan sorrendjét nevezzük, ahol a gráf szomszédsági mátrixa bi-lexikusan rendezett. Mivel a szomszédsági mátrix szimmetrikus és van domináns diagonálisa ($Q(v,v)=1$ $\forall$ $v \in V$), a 6.2 Tétel miatt minden gráfnak van lexikus rendezése.

Megfogalmazunk egy feltételt a gráf csúcsainak lexikus rendezésére nézve, melyhez a $\cong$ jelölést használjuk, ha két csúcs egybeesik vagy szomszédos. Adott G gráf csúcsai lexikusan rendezettek, ha bármely $v_i,v_j,v_k \in V$-re, ahol $i<j$, $v_i\cong v_k$, $v_k\ncong v_j$, van olyan v_ℓ csúcsa a gráfnak, hogy $\ell>k$, $v_j\cong v_\ell$, $v_i\ncong v_\ell$.

6.2. A mátrixok bi-lexikus rendezésének algoritmusa

Ebben a részben bemutatjuk a mátrixok bi-lexikus rendezését előállító algoritmust, melyet A. Lubiw publikált az előző részben említett munkájában. Az algoritmus futásideje $O(L\log^2 L)$, ahol egy $m\times n$-es mátrixban e jelöli a mátrix legkisebb eleménél nagyobb elemek számát, $L{=}m{+}n{+}e$.

Bevezetünk néhány jelölést és elnevezést az algoritmus leírásához. Egy véges E halmaz rendezett partíciója az $(E_1,E_2,\ldots E_k)$ rendezett lista, ahol az $E_i \subseteq E$ $(i{=}1,\ldots,k)$ részhalmazok diszjunktak és uniójuk az alaphalmaz. Az E halmaz teljes, azaz egyelemű részekből álló $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ $e_i \in E$ $(i = 1, \ldots, n = |E|)$ rendezése konzisztens az $(E_1,E_2,\ldots E_k)$ rendezett partícióval, ha $e_i{\in}E_p$, $e_j{\in}E_q$, $p{<}q$ maga után vonja $i{<}j$-t. A mátrix sorainak $(R_1,R_2,\ldots R_k)$ és oszlopainak $(C_1,C_2,\ldots C_\ell)$ rendezett partíciójából egyet-egyet kiválasztva a mátrix egy $B{=}Q(R_i,C_j)$ blokkját kapjuk. B blokk konstans, ha minden eleme megegyezik. A legnagyobb elem B-ben $\max(B){=}\ \max\{Q(r,c)\colon\ r{\in}R_i,\ c{\in}C_j\}$. Hasító sornak hívjuk B-nek azt az $r{\in}R_i$ sorát, melyre $\{c{\in}C_j\colon\ Q(r,c){=}\max(B)\}$ nem üres, valódi részhalmaza C_j-nek. Hasonlóan definiáljuk a hasító oszlopot. Minden nem konstans blokknak van hasító sora vagy oszlopa.

Az algoritmus minden lépésében számon tartjuk a soroknak és az oszlopoknak egy rendezett partícióját. Kiinduláskor ez a legdurvább, egy részből álló partíció. Az algoritmus akkor ér véget, ha a sorok és az oszlopok rendezett partíciói által meghatározott blokkok mind konstansak. Minden lépésben kiválasztjuk a legjobboldalibb és legalsóbb nem konstans $B{=}Q(R^*,C^*)$ blokkot. Ha B-nek van $r{\in}R^*$ hasító sora, akkor e mentén felosztva cseréljük ki C^*-ot az oszlopok partíciójában $\{c \in C^*\colon\ Q(r,c){\neq}\ \max(B)\}$, $\{c \in C^*\colon\ Q(r,c){=}\ \max(B)\}$ diszjunkt részhalmazokra. Ha a kiválasztott nem konstans B blokknak nincs hasító sora, akkor van hasító oszlopa, mely alapján az előző felosztáshoz hasonló módon meghatározzuk R^* két részhalmazát, amikre kicseréljük a sorok rendezett partíciójában. A rendezett partíció finomításának folyamata akkor ér véget, ha már minden blokk konstans.

A 0-1 mátrixok bármely bi-lexikus rendezése elérhető az algoritmussal. A végeredményként kapott rendezés a kiindulástól és a blokkok választásától függ. Ha az adott 0-1 mátrix kiinduláskor bi-lexikusan rendezett alakban van megadva, akkor mindig a legalsó hasító sort vagy legjobboldalibb hasító oszlopot választva az algoritmus lépései során nem fog változni a sorok és oszlopok sorrendje, tehát a kiindulási mátrixot kapjuk a bi-lexikus rendezés eredményéül. Az viszont nem igaz, hogy valós mátrixok bármely bi-lexikus rendezését előállítja az algorit-

mus. Például a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixhoz nem fogunk hozzájutni ezzel a rendezési algoritmussal, hanem csak a szintén bi-lexikusan rendezett $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ alakban áll elő.

A domináns diagonálisú szimmmetrikus mátrixok esetén az algoritmus lépései támogatják azt a szándékunkat, hogy a végeredményül kapott bi-lexikusan rendezett mátrix szimmetrikus legyen. Amikor a $B{=}Q(T,U)$, $T{\neq}U$ blokkot partícionáljuk, utána a $B{=}Q(U,T)$ blokkal is meg kell tennünk ezt. Ha a szimmetrikus $B{=}Q(T,T)$ blokkot választjuk, akkor a ${}_tq$, $t{\in}T$ hasító sor választása két részre osztja a T oszlop partíció részt, $T{=}T_1{\cup}T_2$. Ezután a domináns diagonális létezése miatt $B_2{=}Q(T,T_2)$ blokkot fogjuk választani és két részre osztani a T sor partíció részt a szimmetria miatt az előzőhöz hasonló módon.

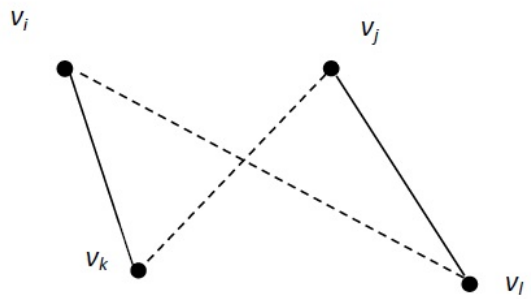
Az algoritmus működésének bizonyítása: Tekintsünk a bi-lexikus rendezési algoritmus végeredményeként kapott Q mátrixban két oszlopot, melyek indexei $d{<}e$. Megmutatjuk, hogy az oszlopvektorok elemeit a mátrix végső rendezése alapján sorba véve q_d lexikografikusan nem nagyobb, mint q_e. Ennek a megfontolásnak az analógiájára működik két sor helyes sorrendjének a belátása is.
Legyen s a végeredményül kapott rendezésben a legalsó sor, ahol q_d és q_e eltér egymástól. Indirekt tegyük fel, hogy a két oszlopvektor lexikografikusan csökkenő sorrendben követi egymást, azaz $Q(s,d){>}Q(s,e)$. Mivel a két oszlop nem egyezik meg egymással, d és e biztosan két különböző részében vannak az oszlopok rendezett partíciójának. Tegyük fel, hogy a $B_1{=}Q(R_1,C_1)$ blokk választása során a $t{\in}R_1$ hasító sor osztotta két különböző partícióba d-t és e-t. Ezért a q_d és a q_e vektorok elemei az R_1 sorpartíció rész alatt megegyeznek és $Q(t,d) < \max(B_1){=}Q(t,e)$. Mivel s a legalsó sor a végső rendezésben, ahol q_d és q_e különbözik, $s{>}t$ és $s{\in}R_1$, valamint $Q(s,e) < Q(s,d) \leq \max(B_1) = Q(t,e)$.
Mivel ${}_sq$ és ${}_tq$ sorok nem egyeznek meg, az algoritmus valamelyik lépésében külön sorpartíció részbe kellett, hogy kerüljenek. Legyen ez a $B_2{=}Q(R_2,C_2)$ blokk és $f{\in}C_2$ oszlop választása során, hogy B_2 blokkot B_1 blokk választása után kellett kiválasztanunk. Az ${}_sq$ és ${}_tq$ sorvektorok elemeinek C_2 oszloppartíció résztől jobbra eső koordinátái megegyeznek, valamint $Q(t,f) < \max(B_2) = Q(s,f)$.

A korábban leírt B_1 blokknál való felosztás során f oszlop nem lehetett a C_1 partíciótól jobbra, mert akkor a B_2 blokkot választottuk volna B_1 előtt. A C_1 partíció jobb oldali részpartíciójának sem lehet eleme az f oszlop, mert akkor $Q(t,f) = \max(B_1) \geq Q(s,f)$ lenne. Tehát a B_1 blokk kiválasztásakor az f oszlop az e oszlopot balra megelőző oszloppartíciónak volt az eleme. Emiatt $Q(t,e){=}Q(s,e)$, ami ellentmondás. $\square$

6.3. Gráfok lexikus rendezése

Ebben a részben azzal foglalkozunk, hogy mit jelent a gráfok nyelvén a szomszédsági mátrix szimmetrikus bi-lexikus rendezése, azaz a gráf lexikus rendezése. A csúcsok lexikus sorrendje és a gráf lexikus rendezése kifejezések alatt ugyanazt értjük a továbbiakban. Adott $G{=}(V,E)$ gráf csúcsainak szeretnénk a $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sorrendjét meghatározni ($|V|{=}n$), hogy teljesüljön az alábbi feltétel:

$$\forall\ v_i{,}v_j{,}v_k \in V,\ i < j,\ v_i{\cong}v_k,\ v_k{\ncong}\ v_j \Rightarrow \exists\ v_\ell \in V\colon \ell{>}k,\ v_j{\cong}v_\ell,\ v_i{\ncong}v_\ell.$$



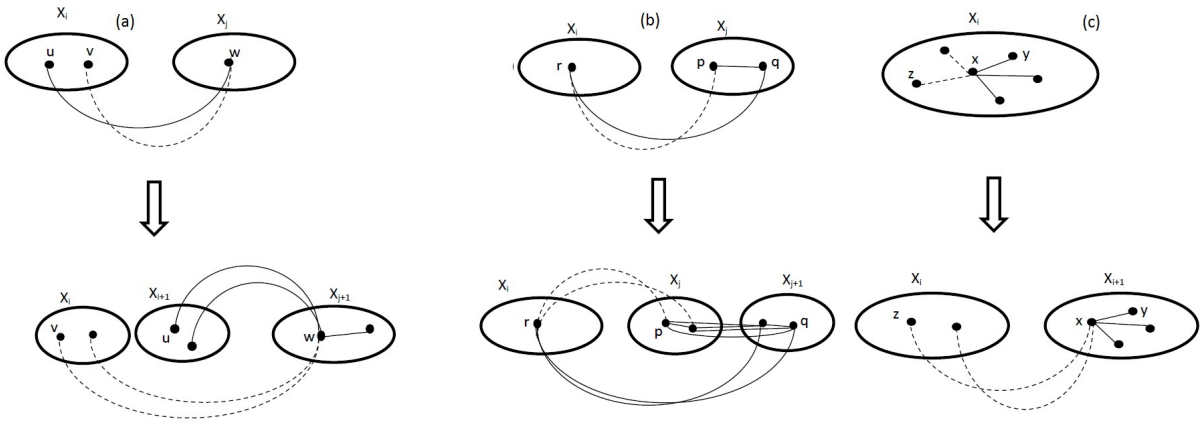
6. ábra. *A csúcsok lexikus sorrendjének feltétele.*

Az algoritmus minden lépésben fenntartja a csúcsok egy rendezett partícióját. Kiinduláskor ez egy részből áll, ami az egész V. Az algoritmus akkor ér véget, ha minden partíció rész teljes részgráfot feszít (lehet ez egy csúcs is) és bármely két $X, Y{\subseteq}V$ rész között vagy nem fut él, vagy minden él be van húzva ($\nexists\ xy{\in}E\colon x{\in}X,\ y{\in}Y$ vagy $\forall\ x{\in}X,\ y{\in}Y\colon xy{\in}E$). A csúcsok minden olyan sorrendje lexikus rendezése G-nek, amely konzisztens a végeredményül kapott rendezett partícióval.

Az algoritmus fenntartja azt a (T) tulajdonságot, hogy minden lépésben az aktuális rendezett partícióból az X_i és az X_j, $i < j$ blokkokat kiválasztva ha van olyan X_k, hogy valamely X_i-beli és X_k-beli csúcs össze van kötve, X_j és X_k csúcsai között pedig nincs él, akkor létezik olyan X_ℓ rész a partícióban, $\ell > k$, hogy X_i és X_k között nem fut él, míg van olyan X_j-beli és X_ℓ-beli csúcs, melyek össze vannak kötve. Tekintsük az algoritmus lépéseit, megmutatva, hogy fenntartják a (T) tulajdonságot.

Az aktuális rendezett partícióból az algoritmus kiválasztja azt a legnagyobb indexű X_i részt, amihez van olyan X_j, $i < j$ rész, hogy (a) $\exists\ u{,}v{\in}X_i$ és $w \in X_j$, hogy $uw \in E$, $vw \notin E$, vagy (b) $\exists\ p, q \in X_j$ és $r \in X_i$, hogy $pr \notin E$, $qr \in E$, tehát a két rész között

van él, de nincs mind behúzva. Ekkor az (a) esetben X_i részt kettévágjuk $w \in X_j$ csúcs alapján, X_i:=$X'_i \cup X'_{i+1}$, ahol X'_i:=$\{x \in X_i : xw \notin E\}$ és X'_{i+1}:=$\{x \in X_i : xw \in E\}$. Ekkor technikai megfontolásból a sorrendben az X_i utáni részek indexét növeljük eggyel, $j > i$ esetén j:=$j + 1$. A (b) esetben az X_j halmazt osztjuk ketté az $r \in X_i$ csúccsal való összekötöttség alapján, X'_j:= $\{v \in X_j : vr \notin E\}$ és X'_{j+1}:= $\{v \in X_j : vr \in E\}$, valamint minden j-nél nagyobb indexű rész indexét 1-gyel növeljük. Abban az esetben, ha az aktuálisan vizsgált X_i-hez nem találunk ilyen X_j részt $(j > i)$, akkor azt vizsgáljuk, hogy az X_i csúcsai klikket feszítenek-e. Ha nem, akkor egy olyan $x \in X_i$ csúcs mentén, melynek az aktuális részben van szomszédja és vele nem összekötött csúcs is, kettéosztjuk az X_i részt: X'_i:=$\{v \in X_i : vx \notin E\}$, X'_{i+1}:=$\{v \in X_i : vx \in E\}$, illetve a $j > i$ indexekre $j := j + 1$. A következő lépésben az aktuálisan vizsgált rész az új indexelés szerint az $(i + 1)$. lesz. Ha X_i csúcsai klikket feszítenek és $i > 1$, akkor tovább megyünk az X_{i-1} rész vizsgálatára. Ha X_i csúcsai klikket feszítenek és $i = 1$, akkor vége az algoritmusnak.



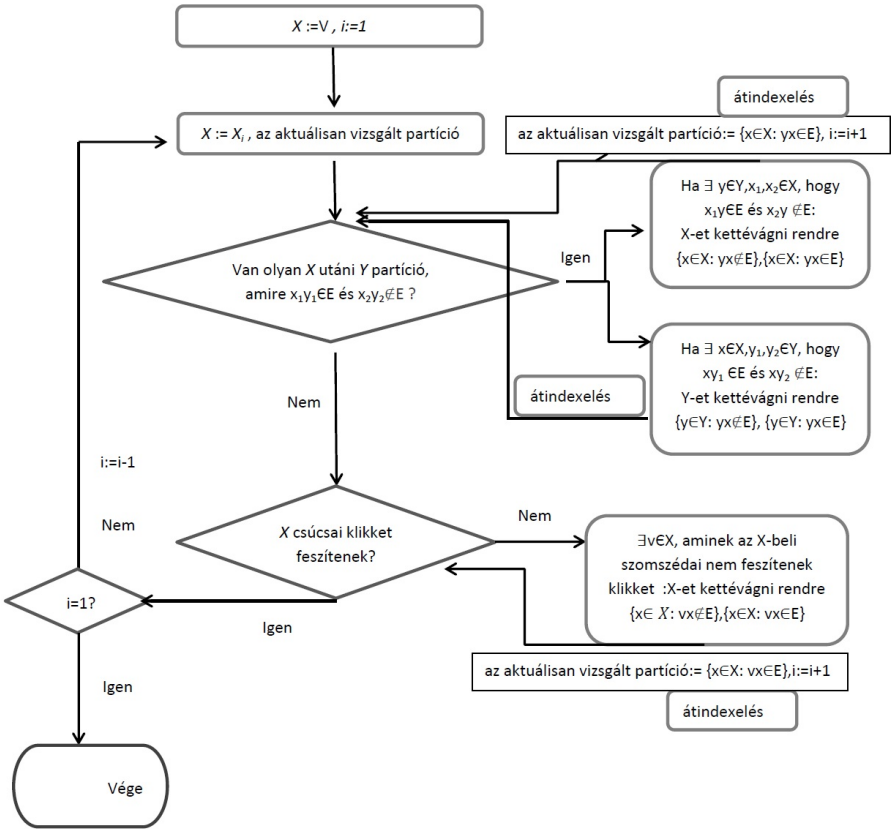
7. ábra. *Az algoritmus lehetséges lépései.*

Megmutatjuk, hogy az algoritmus minden lépése fenntartja a (T) tulajdonságot. Tegyük fel, hogy az algoritmus eddig a rendezett $(X_1,\ldots,X_k)$ partíciót állította elő és fennáll (T) a tulajdonság. A tulajdonság megmaradásának belátását a lehetséges lépések alapján esetekre bontva végezzük. Tegyük fel, hogy az aktuálisan kiválasztott rész az X_i, $1 \leq i \leq k$, az új rendezett partíció $(X'_1,\ldots,X'_{k+1})$. A (T) tulajdonság úgy tudna sérülni valamely X_p és X_q részek viszonyában, ha csúcsaik legnagyobb indexű közös x szomszédját tartalmazó X_r részét $(r > q > p)$ az algoritmus kettévágja, és X_p csúcsainak valamely szomszédja X'_{r+1}-be kerül, X_q csúcsainak szomszédjait viszont csak X'_r-ben találjuk a felosztás után. A háromféle lehetséges lépést sorra véve megmutatjuk, hogy semilyen kettéosztás nem eredményez ilyen állapotot.

Ha a (c) lépés következik be, akkor az X_i-t két részre bontjuk, így keletkezik az X'_i és az X'_{i+1}. Csak akkor következhetett a (c) lépés, ha az X_i és bármely sorrendben rákövetkező rész között vagy nem fut él vagy mind be van húzva. Az X'_i,X'_{i+1} részek és egy X'_j rész ($j > i+1$ vagy $j < i$) viszonyában a tulajdonság fennmarad. Az X'_i és az X'_{i+1} részekre igaz, hogy ha X'_i valamely csúcsa össze van kötve egy X'_j-beli csúccsal ($j > i+1$), akkor X'_i és X'_{i+1} minden csúcsa össze van kötve az összes X'_j-beli csúccsal, tehát nincs olyan feltételt sértő X'_k rész ($k > i$), hogy vezet él X'_i és X'_k között, de nem vezet él X'_{i+1} és X'_k között. Még ellenőrizni kell, hogy az X_i-t megelőző részek tekintetében nem romlik-e a tulajdonság. Ez akkor fordulhatna elő, ha lennének olyan X'_p és X'_q részek ($p < q < i$), hogy X'_p csúcsainak legnagyobb indexű részben lévő szomszédja X'_{i+1}-ben, X'_q-nek pedig X'_i-ben van. Tudjuk, hogy X'_p=X_p és X'_q=X_q valamikor egy rész volt, amit szétvágott az algoritmus. Ennek a szétvágásnak valamely X_i rész utáni $v \in V$ csúcs mentén kellett történnie, hogy X_p egyik csúcsa sem szomszédos v-vel, míg X_q valamely csúcsa igen. Tehát mindenképp van olyan X'_ℓ partíció, $\ell > i+1$, hogy az X'_p és X'_ℓ részek között nem fut él, míg X'_q és X'_ℓ között igen, különben sérülne az a kiindulási feltétel, hogy az (X_1,...,X_p,...,X_q,...,X_i,...,X_k) rendezett partícióra teljesül (T).

Ha a (b) lépés következik be, akkor az X_i rész vizsgálata során találtunk a partícióban utána szereplő olyan X_j részt ($j > i$), hogy X_j valamely csúcsával szomszédos X_i egy csúcsa, valamelyikkel nem az, ez alapján kettévágjuk X_j-t. Az X_i utáni részek viszonya a tulajdonságot illetően nem változik, ugyanis az X_ℓ ($\ell > i$) részek csúcsai vagy mind össze vannak kötve X_j minden csúcsával, vagy egyáltalán nem fut él közöttük. A sorrendben X_i előtti részek között sem lehet két olyan X_m,X_n ($m > n$), melyek legnagyobb indexű közös szomszédja ugyanabban az X_j részben volt($h > j$), mert a X_m és X_n az algoritmus során ketté lettek osztva valamely X_j utáni részbeli csúccsal való összekötöttségük alapján. Hasonló érvelés alkalmazható az (a) lépés esetén is.

Az algoritmus működése a gráf szomszédsági mátrixán elmondható a mátrix bi-lexikus rendezési algoritmusa mintájára. Összehasonlítjuk a mátrixok és gráfok nyelvén való leírását az algoritmus működésének. Az algoritmus minden lépésben kiválasztja a partícióból azt a legnagyobb indexű $X \subseteq V$ részt, amihez létezik olyan nagyobb indexű $Y \subseteq V$ rész a partícióban, hogy X és Y között fut él, de nincs mind behúzva, vagy X csúcsai nem feszítenek klikket. Az első esetben olyan blokkot választottunk, mely szomszédsági részmátrixa nem szimmetrikus a főátlóra. Mivel nem konstans, biztosan van olyan $x \in X$ csúcsa, melynek van $y \in Y$-beli szomszédja, de nincs összekötve minden Y-beli csúccsal, vagy valamely $y \in Y$ csúcsának van legalább 1, de nem minden $x \in X$ szomszédja. Az első esetben egy hasító sor mentén két részre osztjuk az Y oszlop partíciót, azaz Y-t kicseréljük $\{v \in Y\colon (v,x) \notin E\}$,$\{v \in Y\colon (v,x) \in E\}$

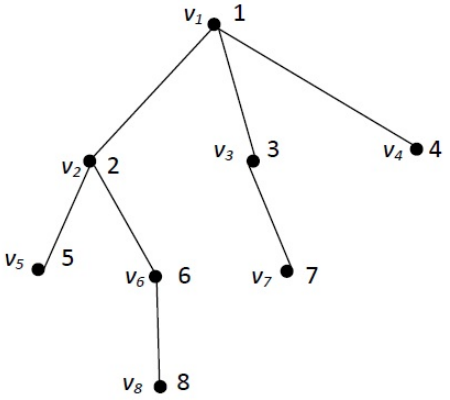


8. ábra. *A gráfok csúcsainak lexikus sorrendjét előállító algoritmus folyamatábrája.*

partíciókra ebben a sorrendben. A második esetben X részt osztjuk fel $y \in Y$ hasító oszlop mentén $\{v \in X\colon (v,y) \notin E\}$, $\{v \in X\colon (v,y) \in E\}$ partíciókra. Az X kiválasztásának második fajtája olyan blokkot jelent, ami szimmetrikus a főátlóra és nem konstans, tehát tartalmaz 0 és 1 elemeket is. Azaz van olyan $x \in X$ csúcs, ami a többi X-beli csúcs egy részével szomszédos, másik részével nem. Ez a csúcs mentén osszuk két részre a blokkot, egymás után a sorok és oszlopok partíciójában. Cseréljük ki X-et a $\{v \in V\colon (v,x) \notin E\}$, $x \cup \{v \in V\colon (v,x) \in E\}$ részekre a partícióban. Igaz most hasító sorokról és oszlopokról volt szó egy $B=Q(X,Y)$ blokk esetén, láttuk, hogy ez szimmetrikusan meg fog ismétlődni $B=Q(Y,X)$ blokkra is, tehát helytálló a csúcshalmaz $X,Y \subset V$ csúcsainak partíciójára tenni kijelentést.

6.3.1. Példa: fák lexikus rendezése

Ebben a részben olyan gráfokat vizsgálunk, melyek körmentesek és összefüggőek, a fákat. A lexikus rendezés algoritmusának működését jól meg lehet figyelni a fákon. Ha az adott $G{=}(V,F)$ gráf fa, akkor $|V|{=}n$ csúcsa $|F|{=}n-1$ élt feszít.



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

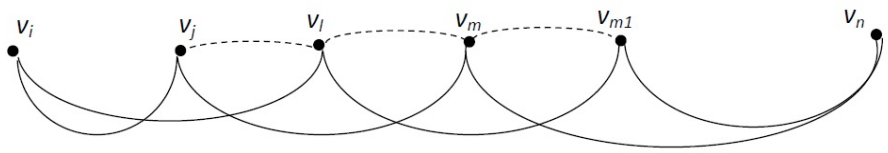
9. ábra. *Példa: Nem lexikusan rendezett fa és szomszédsági mátrixa.*

A $G{=}(V,F)$ fában a csúcsok egy tetszőleges $r \in F$ gyökérponttól számított távolságát jelölje $\ell_r(v)$, ahol $\ell_r(r){=}0$, $\ell_r(v){\geq}\ 0\ \forall v \in V$. A továbbiakban mutatunk egy módszert a fa csúcsainak lexikus sorrendjének előállítására egy gyökérponttól vett távolság nemnövekvő sorrendje alapján.

6.2. Megfigyelés. *A lexikusan rendezett fában minden csúcsból pontosan egy él vezet egy nagyobb indexű, sorrendben utána következő csúcsba (kivétel a legnagyobb indexű csúcsot).*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy van olyan csúcs, hogy egynél kevesebb szomszédja előzi meg a sorrendben, azaz nem vezet él valamely v_i $(1 \leq i < n)$ csúcsból semelyik v_j, $n \geq j > i$ csúcsba. Akkor semelyik v_k, $1 \leq k < i$ korábbi csúcsból sem vezethetne él valamely v_j, $j > i$ csúcsba a lexikus rendezés tulajdonsága miatt, így a gráf nem lenne összefüggő, ez ellentmondás. Tehát legalább egy él vezet minden csúcsból egy rákövetkezőbe (kivétel természetesen az utolsó csúcsot). Indirekt tegyük fel, hogy egynél több él vezet valamely v_i $(1 \leq i < n)$ csúcsból a sorrendben rákövetkezőkhöz, egy v_j és egy v_ℓ $n \geq \ell > j > i$ csúcsba. Ekkor a lexikus rendezés feltétele miatt, ha v_j és v_ℓ nincs összekötve (nem lehetnek összekötve, hiszen a fa körmentes), akkor v_j-nek van egy v_m szomszédja, $n \geq m > \ell$, ami nem szomszédja v_i-nek. Továbbá v_j és v_ℓ sorrendje miatt v_ℓ-nek van v_{m_1} szomszédja, hogy

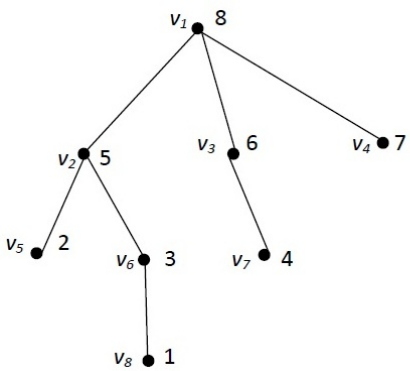
$m_1 > m$, és ezt iterálva kört kapunk, ami nem lehetséges a fában. Tehát semelyik csúcsnak nem lehet 1-nél több vagy kevesebb szomszédja a sorrendben rákövetkező csúcsok között.



10. ábra. *Lexikusan rendezett fában egy csúcsnak nem lehet 1-nél több rákövetkező szomszédja.*

6.3. Megfigyelés. *Ha a csúcsokat egy tetszőleges $v \in V$ gyökérponttól számított távolság, az $\ell_r(v)$ alapján nemnövekvő sorrendbe rendezzük, ügyelve arra, hogy (i) az azonos $\ell_r(v)$ értékű csúcsok közül a közös szülővel rendelkezők egymás után következzenek a sorrendben és (ii) a korábban kiválasztott csúcsok szomszédai előbbre legyenek a sorrendben az azonos távolságú csúcsok között, akkor a fa csúcsainak lexikus sorrendjét kapjuk.*

Bizonyítás: Belátjuk, hogy a csúcsok $(v_1,\ldots,v_n)$ sorrendje lexikus rendezését adja a fának, ha $l_{v_n}(v_i)<l_{v_n}(v_j)$ esetén $i > j$, valamint az (ii) tulajdonság teljesül. Ellenőrizzük a lexikus rendezés feltételét. Bármely $v_p,v_q \in V$ csúcsok esetén, ha $p < q$ és van olyan v_r csúcs, hogy $v_pv_r \in E$ és $v_qv_r \notin E$ megmutatjuk, hogy létezik $v_s \in V$, hogy $s > r$ és $v_pv_s \notin E$, $v_qv_s \in E$. Az (i) feltétel miatt $l_{v_n}(v_p)\geq l_{v_n}(v_q)$. Ha $l_{v_n}(v_p)>l_{v_n}(v_q)$, akkor a v_p csúcs sorrendben rákövetkező v_r szomszédjára a $l_{v_n}(v_p)>l_{v_n}(v_q)\geq l_{v_n}(v_r)=l_{v_n}(v_p)$-1 összefüggés teljesül, tehát $l_{v_n}(v_q)=l_{v_n}(v_p)-1 =l_{v_n}(v_r)$. A 6.2 Megfigyelés miatt v_p csúcsnak ez az egyetlen sorrendben rákövetkező szomszédja, valamint v_q-nak is pontosan egy olyan v_s szomszédja van, amire $s > q$ és $l_{v_n}(v_s)=l_{v_n}(v_q)-1 <l_{v_n}(v_r)$, tehát $s > r$ és $v_sv_p \notin E$, így a lexikus rendezés feltétele teljesül. Ha $l_{v_n}(v_p)=l_{v_n}(v_q)$, vagyis a két csúcs egyenlő távolságra van a v_n gyökércsúcstól, akkor az (ii) feltétel miatt a v_p csúcs egyetlen sorrendben rákövetkező szomszédjának az indexe kisebb lesz, mint v_q szomszédjáé, tehát a lexikus rendezése feltétele teljesül.



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccc} v_8 & v_5 & v_6 & v_7 & v_2 & v_3 & v_4 & v_1 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_8 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_1 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

11. ábra. *Példa: Lexikusan rendezett fa és bi-lexikus szomszédsági mátrixa.*

6.3.2. A lexikus rendezés és a Havel-Hakimi algoritmus

Ebben a részben a Havel-Hakimi algoritmus és a lexikus rendezés kapcsolatával foglalkozunk. Havel és Hakimi azt a kérdést válaszolták meg, hogy adott $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ nemnegatív egész számokból álló sorozathoz mikor készíthető n csúcsú egyszerű gráf d_i (i=1,$\ldots, n$) fokszámokkal[9],[8]. Jól ismert a kézfogás lemma, mely szerint $2 \mid \sum_{i=1}^{n} d_i$ szükséges feltétele egy fokszámsorozat gráfot való realizálhatóságára, azonban ez csak multigráfokra elégséges, egyszerű gráfok realizálhatóságára nem. Az alábbiakban közöljük a Havel és Hakimi által megfogalmazott feltételt adott fokszámsorozathoz egyszerű gráf realizálhatóságára, mely algoritmust is nyújt a gráf létrehozására. A tétel bizonyításában találkozunk a bi-lexikus sorrend feltételéhez rokon gondolattal. Felmerül a kérdés, hogy a Havel-Hakimi algoritmushoz definiálható sorrend bi-lexikus sorrendet ad-e.

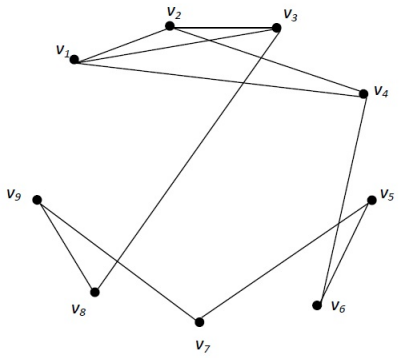
6.3. Tétel. *Akkor és csak akkor létezik olyan egyszerű gráf, melynél a csúcsok fokszáma $d_1 > 0$, $d_2 \geq \ldots \geq d_n$, ha létezik $d_2 - 1$, $\ldots$,$d_{d_1+1} - 1$,d_{d_1+2},$\ldots$,d_n fokszámú egyszerű gráf.*

Bizonyítás: Az elégségesség bizonyítása könnyen látható, mivel ha az $n - 1$ csúcson realizált $d_2 - 1$, $\ldots$,$d_{d_1+1} - 1$,d_{d_1+2},$\ldots$,d_n fokszámú gráfhoz hozzáveszünk egy új v_1 pontot, amit összekötünk a v_2,$\ldots$ v_{d_1+1} csúcsokkal, akkor pont a d_1,d_2,$\ldots$,d_n fokszámsorozat egy realizációját kapjuk.
A szükségesség belátása következik. Legyen G az a gráf, ami a d_1,d_2,$\ldots$,d_n fokszámsorozatot realizálja. Jelölje S a G gráf azon csúcsait, melyek fokszámai d_2,$\ldots$,d_{d_1+1} valamelyikével megegyeznek, $N(v_1)$ pedig a d_1 fokszámú v_1 csúcs szomszédainak halmazát jelenti. Ha $S \subseteq N(v_1)$, akkor v_1-et elhagyva pont a kívánt G' gráfot kapjuk. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan S-beli csúcs, ami nem eleme $N(v_1)$-nek és legyen G olyan, hogy $|N(v_1) \cap S|$-et maximalizálja. Így van olyan d_j fokszámú $v_j \in S$ csúcs ($2 \leq j \leq d_1 + 1$), ami nem szomszédja v_1-nek. Emiatt van olyan d_k fokszámú v_k csúcs $N(v_1)$-ben, amire $k > d_1 + 1$ és $v_k \notin S$. Mivel $d_k \leq d_j$ és $v_1 v_k \in E$, $v_1 v_j \notin E$, van olyan v_i szomszédja v_j-nek, ami nem szomszédja v_k-nak. Ilyenkor a $(v_1 v_k)$ és $(v_i v_j)$ élek helyett $(v_1 v_j)$, $(v_i v_k)$ éleket a gráfhoz véve egyszerű gráfhoz jutunk, ezzel növelni tudjuk $|S \cap N(v_1)|$ értékét, ezzel ellentmondva az indirekt feltételnek. $\square$

A Havel-Hakimi algoritmusnak egy speciális esetében minden lépésben az aktuálisan maximális d_i fokszámú csúcsot kötjük össze a fokszámok nemcsökkenő sorrendjében utána következő d_i darab csúccsal. Utána d_i-t töröljük a sorozatból, szomszédjai fokszámát eggyel csökkentjük, a nemcsökkenő sorrendet esetleg korrigáljuk és újra kiválasztjuk a legnagyobb fokszámú csúcsot, míg minden fokszám 0 nem lesz. Felmerül a kérdés, hogy ebben az esetben a kiindulási $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ sorrend a hozzátartozó csúcsoknak fordított lexikus sorrendjét adja-e. Az algoritmus működése azt sugallhatja, hogy mivel a kisebb fokszámú csúcsokhoz később kötünk éleket, $v_j v_\ell \in E$, $v_j v_k \notin E$, $d_j \geq d_k \geq d_\ell$ esetén lenne olyan $v_i \in V$, $d_i \geq d_j$

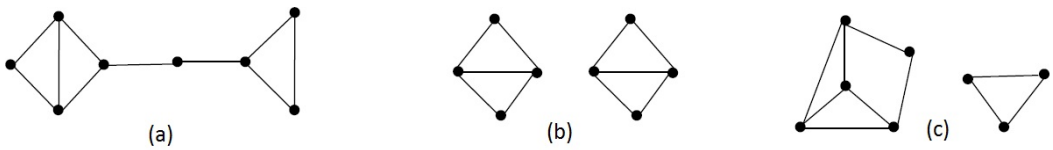
csúcs, hogy $v_i v_k \in E$ és $v_i v_l \notin E$. Ez azonban nem igaz, a kiindulási fokszámsorrend nem adja mindig a gráf fordított lexikus sorrendjét, ezt mutatja a 12. ábrán látható gráf. A csúcsok a 3,3,3,3,2,2,2,2,2 fokszámsorozat alapján vannak indexelve és ha fordított lexikus sorrend lenne, akkor $v_8 v_3 \in E$ miatt minden $v_i (i < 8)$ csúcsnak, mely nem szomszédos v_3-mal, kellene lennie 3-nál kisebb indexű szomszédjának, ez azonban nem teljesül az v_i-re $i \in \{5, 6, 7\}$.

Az könnyen látszik, hogy a kiindulási nemcsökkenő fokszámsorrend általában nem állít elő lexikus sorrendet, például $d_1 = n-1$, $d_2 < n-2$ esetén, ahol n a csúcsok száma, v_1 össze van kötve minden csúccsal, így egyik utána következő csúcsnak sem található olyan szomszédja, amivel v_1 nem szomszédos. Az algoritmushoz kapcsolódóan tekinthetnénk a fokszámsorozaton kívül a csúcsok kiválasztásának sorrendjét. Az előző indoklás miatt itt is csak a fordított lexikus rendezés lehetőségét kell számba vennünk. A 12. ábrán a kiválasztott csúcsok sorrendje v_1, v_2, v_5 és itt meg is állhatunk, mert már látható, hogy ez nem lehet fordított lexikus sorrend, mivel v_3 v_5 után kerül sorra, viszont $v_1 v_3 \in E$, $v_1 v_5 \notin E$.



12. ábra. *Havel-Hakimi algoritmus által realizált gráf, mely nem állít elő lexikus sorrendet.*

A következő részben részletesen foglalkozunk merevkörű gráfokkal. Azokat a gráfokat nevezzük merevkörűnek, amelyek nem tartalmaznak legalább négy élből álló átlómentes kört. Itt a Havel-Hakimi algoritmus kapcsán azt nézzük meg, hogy egy merevkörű gráf fokszámsorozatához az algoritmus mindig merevkörű gráfot hoz-e létre. A válasz nem, egy fokszámsorozathoz realizálható merevkörű és nem merevkörű gráf is a Havel-Hakimi algoritmussal.



13. ábra. *Havel-Hakimi algoritmus által előállított gráfok a 3,3,3,3,2,2,2,2 fokszámsorozatra.*

7. A bi-lexikus rendezés alkalmazásai

Ebben a részben bemutatjuk a mátrixok bi-lexikus rendezésének alkalmazásait a teljesen kiegyensúlyozott mátrixok, a merevkörű gráfok és az átlós páros gráfok vizsgálatában. A bi-lexikus rendezés segítségével bemutatjuk az említett mátrix- és gráfosztályoknak az NP- és co-NP jellemzésüket.
A vizsgált Q 0-1 mátrixok a továbbiakban az algoritmus számára könnyű kezelhetőség érdekében úgy vannak megadva, hogy számon tartjuk a sorok és az oszlopok listáját, minden $r \in R$ sorra azon oszlopok listáját, ahol $Q(r,c)=1$ és minden c oszlopra azon sorok listáját, ahol $Q(r,c)=1$.

7.1. Teljesen kiegyensúlyozott mátrixok és a Γ-nélküli rendezés

Egy $n \times n$-es 0-1 mátrixot körmátrixnak nevezünk ($n \geq 3$), ha minden oszlopában és minden sorában pontosan 2 darab 1-es van és egyik valódi részmátrixára sem igaz ez a tulajdonság. Azokat a 0-1 mátrixokat, melyek nem tartalmaznak kör részmátrixot, teljesen kiegyensúlyozott mátrixoknak nevezzük.

Γ-nak nevezzük azt a 2×2-es 0-1 értékű mátrixot, melyben pontosan 1 darab 0 szerepel a jobb alsó sarokban, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Egy 0-1 mátrixot Γ-nélkülinek nevezünk, ha nincs Γ részmátrixa. A Γ-nélküli rendezés olyan rendezése a mátrixnak, ami Γ-nélküli mátrixot hoz létre.

7.1. Tétel. *Teljesen kiegyensúlyozott mátrix bi-lexikus rendezésében nincs* Γ *részmátrix.*

A 7.1. Tétel bizonyításához felhasználjuk a következő tételt:

7.2. Tétel. *Legyen Q bi-lexikusan rendezett 0-1 mátrix, R sor- és C oszlopindexhalmazzal. Q bármely 2×2-es részmátrixa, melyre* $r_1 < r_2 \in R$, $c_1 < c_2 \in C$, $Q(r_1,c_2)=Q(r_2,c_1)=1$, $Q(r_2,c_2)=0$ *kiterjeszthető valamely n≥3-ra olyan n×n-es részmátrixá, hogy annak* $r_1 < r_2 < \ldots < r_n \in R$ *és* $c_1 < c_2 < \ldots < c_n \in C$ *indexeire* $Q(r_i,c_{i+1})=Q(r_{i+1},c_i)=1$ *minden i=1,...,n-1 esetén,* $Q(r_n,c_n)=1$ *és* $Q(r_i,c_j)=0$ *különben, esetleg kivéve i=j=1-et.*
Ez speciálisan azt jelenti, hogy egy Γ *részmátrix kiegészíthető kör részmátrixá.*

Bizonyítás: A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Kezdjük i=2-vel: $Q(r_i,c_i)=0$. Válasszuk ki azt az oszlopot c_{i+1}-nek, amelyik a legjobboldalibb azok közül, ahol ${}_{r_i}q$ és ${}_{r_{i-1}}q$

különböznek. Mivel $Q(r_{i-1}, c_i)$=1 és $Q(r_i, c_i)$=0 és a sorok lexikusan növekednek a bi-lexikusan rendezett mátrixban, $c_{i+1}>c_i$ biztosan létezik és $Q(r_{i-1}, c_{i+1})$=0, $Q(r_i, c_{i+1})$=1. A $q_{c_{i+1}}$ oszlopban a mátrix minden r_{i-1}-nél kisebb sorindexű elemének 0-nak kell lennie, különben sérülne a sorvektorok lexikus rendezésének feltétele.

$$\begin{pmatrix} ? & 1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hasonlóképpen választhatjuk ki az ${}_{r_{i+1}}q$ sort, a legalsó olyat, ahol q_{c_i} és $q_{c_{i-1}}$ oszlopvektorok különböznek. Ha $Q(r_{i+1}, c_{i+1})$=1, akkor a bizonyítással végeztünk n=i+1-re. Ha nem, akkor az indukciós lépést iteráljuk. Mindenképpen véget fog érni a fent definiált lépéssorozat, mivel egyszer elérünk a rendezett mátrix jobbalsó elemének kiválasztásához, ami csak 1 lehet. Ha $M(r_1, c_1)$=1, azaz Γ volt a kezdő 2×2-es mátrix, akkor pont egy kört kaptunk.
Tehát a teljesen kiegyensúlyozott mátrixok (melyek nem tartalmaznak kör részmátrixot) bi-lexikus rendezésében nem lehet Γ részmátrix, ezzel beláttuk a 7.1 Tételt. □

7.1. Megfigyelés. *Ha egy 0-1 mátrixnak van kör részmátrixa, akkor a mátrix bármely rendezésében lesz Γ részmátrix. Mégpedig a kör részmátrix balfelső 1-ese, illetve ennek sorában és oszlopában lévő 1-esek, melyek a körhöz tartoznak.*

7.3. Tétel. *Egy 0-1 mátrixnak akkor és csak akkor van Γ-nélküli rendezése, ha a mátrix teljesen kiegyensúlyozott.* □

A 7.3. Tétel mutatja az ekvivalenciát a teljesen kiegyensúlyozott mátrixok NP- és co-NP-definíciója között. Egy mátrixról beláthatjuk, hogy nem teljesen kiegyensúlyozott, ha megmutatjuk egy kör részmátrixát. A teljesen kiegyensúlyozottság pedig úgy látható be, ha mutatunk egy Γ-nélküli rendezését, erre alkalmas a bi-lexikus rendezése a mátrixnak, mivel az teljesen kiegyensúlyozott mátrix esetén nem tartalmaz Γ-t.

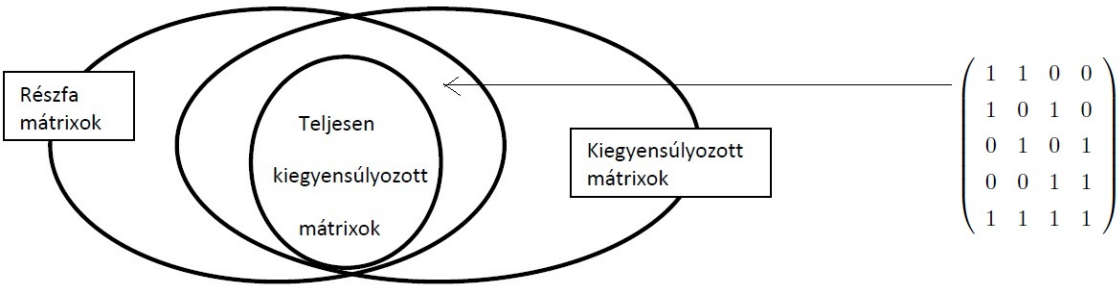
Egy rendezett $Q \in \{0,1\}^{m\times n}$ mátrix Γ-nélküliségének hatékony ellenőrzésére bemutatunk egy megfigyelést, aminek segítségével $O(L)$ idő alatt ellenőrizhető, hogy van-e Q-ban Γ (L=m+n+e, e a mátrix 1-eseinek számát jelöli). Ez a mátrix bi-lexikus rendezésének

előállításával együtt $O(L\log^2 L)$ időt vesz igénybe.

7.2. Megfigyelés. *Ha egy rendezett Q mátrixban van Γ részmátrix, akkor olyan Γ részmátrix is van, melyet $r_1<r_2$ sorok és $c_1<c_2$ oszlopok határoznak meg, hogy $Q(r_1,c)=0$ $\forall$ c: $c_1<c<c_2$, és $Q(r,c_1)=0$ $\forall$ r: $r_1<r<r_2$.*

Bizonyítás: Bevezetünk egy függvényt a Q-beli részmátrixok méreteinek számontartása érdekében, $s(r_1,r_2,c_1,c_2)= |\{c\in C\colon c_1<c<c_2\}| + |\{r\in R\colon r_1<r<r_2\}|$, $r_1<r_2$ sorok és $c_1<c_2$ oszlopok jelölik a részmátrix határait. Jelöljék az s-et minimalizáló Γ részmátrixot a $j_1<j_2$ indexű sorok és $k_1<k_2$ indexű oszlopok. Azt akarjuk belátni, hogy az s-et minimalizáló Γ részmátrixban k_1 és k_2 oszlopok között nincs 1-es a j_1 sorban, valamint j_1 és j_2 sorok között nincs 1-es a k_1 oszlopban. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan m oszlopindex, amire $k_1<m<k_2$ és $Q(j_1,m)=1$. Ha $Q(j_2,m)=0$, akkor $s(j_1,j_2,k_1,m) < s(j_1,j_2,k_1,k_2)$, ha pedig $Q(j_2,m)=1$, akkor $s(j_1,j_2,m,k_2) < s(j_1,j_2,k_1,k_2)$, tehát ellentmondásra jutottunk az indirekt feltevéssel, miszerint j_1,j_2 sorok és k_1,k_2 oszlopok minimális s értékű Γ-t definiálnak. Hasonló érvelés működik a sorokra is. $\square$

A teljesen kiegyensúlyozott mátrixok osztálya része a kiegyenúlyozott mátrixok osztályának. Egy Q 0-1 mátrixot kiegyensúlyozottnak nevezünk, ha nincs olyan részmátrixa, ami egy páratlan hosszú kör incidenciamátrixa. Egy másik szempont alapján a teljesen kiegyensúlyozott mátrixokat a részfa mátrixok osztálya is általánosítja. A részfa mátrixok sorait egy T fa csúcsai, oszlopait a T részfái jelentik, a mátrix egy eleme pontosan akkor 1, ha a sorát jelölő csúcs eleme az oszlopban jelölt részfának, különben 0. A részfa mátrixok bi-lexikus rendezése támogatott Γ-rendezés, mely szerint bármely $j_1 < j_2$ sorok és $k_1 < k_2$ oszlopok által meghatározott Γ részmátrixhoz van olyan $j_3 > j_2$ sora a Q mátrixnak, hogy $Q(j_3,k_1)=Q(j_3,k_2)= 1$.



14. ábra. *A mátrixosztályok elrendeződése.*

7.2. Teljesen kiegyensúlyozott mátrixok és az erősen merevkörű gráfok

Az előző részben a teljesen kiegyensúlyozott mátrixokat vizsgáltuk és a bi-lexikus rendezést alkalmaztuk felismerésükre. Felmerül a kérdés, hogy mi a jelentése a gráfokra nézve a szomszédsági mátrix teljesen kiegyensúlyozottságának. A teljesen kiegyensúlyozott négyzetes mátrixban nincs olyan részmátrix, ami egy 3-nál hosszabb átlómentes kör incidenciamátrixa. A háromszög (három hosszú kör) az általunk használatos szomszédsági mátrixoknál a 3×3-as csupa 1-es részmátrix, hiszen a főátlóban végig 1-esek vannak. A teljesen kiegyensúlyozott, szimmetrikus bi-lexikusan rendezett szomszédsági mátrix a csúcsok olyan $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sorrendjét határozza meg, ahol a Γ-nélkülisége miatt minden $i < j$ és $k < l$ esetén ha $v_i v_k$, $v_i v_l$, $v_i v_k \in E$, akkor $v_j v_l \in E$. Egy gráf csúcsainak az ilyen sorrendjét M. Farber erős eliminációs sorrendnek nevezte [7].

7.1. Definíció. *Egy gráf erősen merevkörű, ha létezik erős eliminációs sorrendje.*

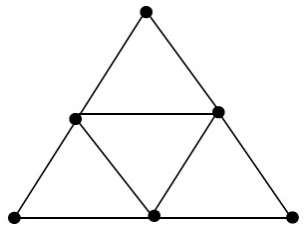
Láttuk, hogy egy teljesen kiegyensúlyozott szomszédsági mátrixú gráf lexikus sorrendje erős eliminációs sorrend. Ebből és a a 7.1 Megfigyelésből adódik a következő tétel:

7.4. Tétel. *[7] Egy gráf akkor és csak akkor erősen merevkörű, ha szomszédsági mátrixa teljesen kiegyensúlyozott.*

A 7.4. Tétel miatt az erős merevkörű gráfok felismerhetőek a szomszédsági mátrixuk bi-lexikus rendezése, majd annak Γ-nélküliségének ellenőrzése alapján. Ez a rendezés elő is állítja az erős eliminációs sorrendet, ha a gráf erősen merevkörű. Az erős merevkörű gráfok karakterizációi közül még egyet említünk M. Farber cikkje alapján [7]. Erős átlónak hívjuk a G gráfnak azt az élét, amely egy páros hosszú körben két páratlan, 1-nél nagyobb távolságra lévő csúcsot köt össze.

7.5. Tétel. *G gráf akkor és csak akkor erősen merevkörű, ha merevkörű és minden legalább 6 hosszú páros körében van erős átló.*

A következő részben a tágabb osztállyal, a merevkörű gráfokkal foglalkozunk.



15. ábra. *Merevkörű, de nem erős merevkörű gráf.*

7.3. Merevkörű gráfok és a szimpliciális sorrend

Egy G gráfot merevkörűnek (háromszögeltnek) hívunk, ha minden legalább 4 csúcsból álló körének van átlója. A szimpliciális sorrend (egyes szakirodalmakban perfekt eliminációs séma) a gráf csúcsainak olyan sorrendje, amiben minden $v_i \in V$ csúcsra a sorrendben utána következő szomszédai klikket alkotnak.

7.6. Tétel. *Egy gráf akkor és csak akkor merevkörű, ha létezik szimpliciális sorrendje.*

Ezzel a klasszikus tétellel láthatjuk a gráf NP és co-NP definíciója közötti ekvivalenciát. A gráf egy csúcsát szimpliciálisnak nevezzük, ha szomszédai klikket alkotnak. A tétel következménye, hogy minden merevkörű gráfnak van szimpliciális csúcsa.

A szimpliciális sorrend előállításához Tarjan és Yannakakis lineáris futásidejű algoritmust publikált, ami max-vissza sorrendet határoz meg a csúcsokon, és ennek a fordítottja szimpliciális sorrend. A max-vissza sorrend létrehozása egy tetszőleges $v_1 \in V$ csúcs kiválasztásával indul, minden lépésben azt a csúcsot választja, ami a legtöbb éllel kapcsolódik a már kiválasztott csúcsokhoz. A v csúcs és a kiválasztott csúcsok között futó élek számát $d(v, V_i)=|\{x \in V_i|\ vx \in E\}|$ jelöli, ahol $V_i=\{v_1, \ldots, v_i\}$ az első i darab kiválasztott csúcsot jelöli. A max-vissza sorrendre igaz, hogy $d(v_i, V_{i-1}) \geq d(v_j, V_{i-1})$ ($\forall 2 \leq i < j \leq n$).

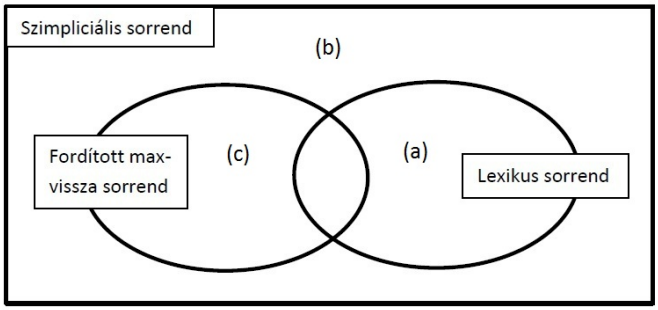
A merevkörű gráfokról szóló rövid bevezető után megnézzük a szimpliciális sorrend kapcsolatát a gráf szomszédsági mátrixának szimmetrikus bi-lexikus rendezésével. A merevkörű gráfok Q szomszédsági mátrixában a csúcsok szimpliciális sorrendezettsége azt jelenti, hogy Q-nak nincs olyan Γ részmátrix, melynek balfelső egyese a főátlóban van.

7.7. Tétel. *A merevkörű gráfok lexikus rendezése szimpliciális sorrendet határoz meg.*

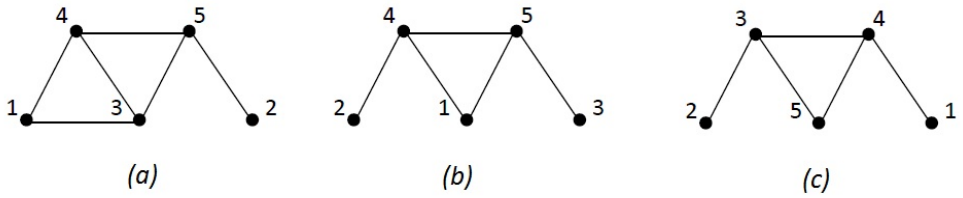
Bizonyítás: Vegyük a $G=(V, E)$ gráf lexikus sorrendjét. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan v_i csúcs a rendezésben, aminek a sorrendben rákövetkező v_j,v_k szomszédjai nincsenek összekötve ($i < j < k$). A gráf lexikus sorrendje miatt teljesül, hogy a v_j csúcsnak van olyan v_k csúcs utáni v_{t_1} szomszédja, amivel v_i nincs összekötve. Válasszuk v_{t_1}-nek a sorrendben leghátsó ilyen tulajdonságú csúcsot. Ha $v_k v_{t_1} \in E$, akkor $(v_i, v_j, v_{t_1}, v_k, v_i)$ csúcsok egy átlómentes kört határoznak meg, ami merevkörű gráfban nem lehetséges. Ha $v_k v_{t_1} \notin E$, akkor ismét a lexikus sorrend tulajdonságára utalva (mivel $v_j v_{t_1} \in E$ és $j < k$) v_k-nak van olyan v_{t_1} utáni v_{t_2} szomszédja, ami a v_j csúccsal nincs összekötve. Ekkor a $v_{t_1} v_{t_2}$ él megléte vagy hiánya ismét ellentmondásra vezet vagy az eddig látott lépés további iterálására utal.

Mivel az m. lépésben a leghátsó olyan v_m csúcsot választjuk, ami v_{m-2}-vel szomszédos, v_{m-3}-mal pedig nem, az $(m-2)$-nél kisebb indexű csúcsok biztosan nem szomszédosak a v_m csúccsal, tehát átlómentes kört hozunk létre a bizonyítás során. A lépések során folyamatosan növekedő élszámú kör egyszer be fog zárulni, mivel a gráfnak véges sok csúcsa van. Az eredményül kapott legalább 4 hosszú átlómentes kör pedig ellentmond a feltételnek, miszerint a gráf merevkörű. □

A gráf lexikus sorrendje tehát szimpliciális sorrendet állít elő, ugyan futásidő tekintetében lassabb a lineárisnál. A max-vissza sorrend egy lokális tulajdonságot figyelve hozza létre a rendezést, a lexikus sorrend pedig a csúcshalmaz partíciójának finomításán alapszik. Az alábbi ábra a merevkörű gráfok szimpliciális sorrendjeinek halmazai közötti összefüggést mutatja.



16. ábra. *Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendjeinek viszonya.*



17. ábra. *Merevkörű gráfok szimpliciális sorrendjeinek viszonya.*

7.4. Teljesen kiegyensúlyozott hipergráfok és az átlós páros gráfok

Eddig a teljesen kiegyensúlyozott Q mátrixokhoz kapcsolódóan olyan gráfokat vizsgáltunk, melyeknek Q a szomszédsági mátrixa, azaz a sorok és oszlopok ugyanazt a V csúcshalmazt jelentik. Ebben a részben olyan $G{=}(S,T;E)$ páros gráfokat vizsgálunk, melyekhez úgy tartozik egy $m\times n$-es Q mátrix ($m=|S|$,$n=|T|$), hogy a páros gráf egyik független T csúcshalmaza a sorokat, a másik pedig az oszlopokat jelöli, $Q(i,j){=}1$, ha $s_it_j\in E$, különben 0. A $G{=}(S,T;E)$ gráfot átlós páros gráfnak (angol elnevezése chordal bipartite) nevezzük, ha Q teljesen kiegyensúlyozott. Az átlós páros gráfok bizonyos tekintetben a merevkörű gráfok páros megfelelői. Egy páros gráf akkor átlós páros, ha nincs benne legalább 6 hosszú átlómentes kör. A mátrix egy $Q(i_0,j_0)$ eleme akkor szimpliciális, ha $Q(i_0,j_0){=}1$ és $Q(i_0,j){=}Q(i,j_0){=}1$ esetén $(i{=}1,\dots,n,\quad j{=}1,\dots,m)$ $Q(i,j){=}1$.

7.8. Tétel. *Minden nemnulla teljesen kiegyensúlyozott mátrixnak van szimpliciális eleme.*

A tétel az átlós páros gráfok nyelvén azt jelenti, hogy minden átlós páros gráfnak van olyan st éle, hogy s és t szomszédai teljes páros gráfot feszítenek.

Bizonyítás: Legyen $G{=}(S,T;E)$ átlós páros gráf. Tegyük fel, hogy G nem teljes páros gráf, ugyanis akkor minden él szimpliciális. Vegyünk egy tartalmazásra nézve maximális $X\subseteq V$ halmazt, hogy X összefüggő részgráfot feszít és van olyan éle a gráfnak, ami nem eleme $X\cup N(X)$ csúcsai által feszített éleknek. Az X halmaz biztosan létezik, mivel egy izolált csúcs megfelelő, vagy ha az nincs, akkor egy olyan $s\in S$ csúcs eleme lehet X-nek, aminek fokszáma kisebb $|T|$-nél.

Legyen $Z{=}V\backslash(X\cup N(X))$. X maximalitása miatt minden $y\in N(X)$ csúcs szomszédos minden $G[Z]$-beli éllel. Hiszen ha lenne olyan él, amivel nem szomszédos y, akkor X-hez hozzávehetnénk y-t, ezzel sértve a feltételbeli X maximalitását, és még maradna él $G[X\cup N(X)]$-en kívül.

Belátjuk azt a segédállítást, hogy $N(X){\cap}S$ minden csúcsa össze van kötve $N(X){\cap}T$ minden csúcsával. Tegyük fel, hogy vannak olyan $u\in N(X){\cap}S$ és $w\in N(X){\cap}T$ csúcsok, melyekre $uw\notin E$. Vegyük a $G[X]$-ben azt a legrövidebb P utat, mely összeköti $N(u)$ és $N(w)$ valamely csúcsait. Legyen $xy\in E$ egy $G[Z]$-beli él. Ekkor az (u,P,w,x,y,u) körben nincs átló és legalább 6 hosszúságú, ami ellentmondás, tehát $N(X){\cap}T$ és $N(X){\cap}S$ teljes páros gráfot feszítenek.

Ha Z nem feszít olyan $ef\in E$ élet, hogy $N(\{e,f\}){\cap}Z$ teljes páros gráfot feszít, akkor a fenti gondolatot alkalmazzuk $G[Z]$-re indukcióval. $\square$

Ennek a bizonyításnak a mintájára kapunk egy bizonyítást arra is, hogy minden merevkörű gráfnak van szimpliciális csúcsa.

7.9. Tétel. *Minden merevkörű gráfnak van szimpliciális csúcsa.*

Bizonyítás: Legyen adott $G{=}(V,E)$ merevkörű gráf. Feltehetjük, hogy G nem teljes gráf, ugyanis akkor minden csúcsa szimpliciális csúcs. Legyen az $X \subset V$ olyan tartalmazásra nézve maximális részhalmaza a csúcsoknak, hogy $X \cup N(X)$-en kívül még van csúcsa a gráfnak és az X által feszített részgráf összefüggő. Ilyen X halmaz biztosan létezik, mert elkezdhetjük felépíteni egy olyan $v \in V$ csúcsból kiindulva, aminek van nem szomszédos csúcsa a gráfban.

Belátjuk, hogy az $N(X)$-beli csúcsok minden $W{:=}V\backslash(X \cup N(X))$ csúccsal szomszédosak. Ha ez nem lenne így, azaz $\exists y \in N(X)$, $z \in W$, hogy $yz \notin E$, akkor $X'{:=}X \cup \{z\}$ több csúcsból álló halmaz lenne, hogy $X' \cup N(X')$-en kívül még van a gráfnak csúcsa, például z.

Megmutatjuk, hogy $N(X)$ csúcsai klikket feszítenek. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem igaz, tehát $\exists u, v \in N(X)$, hogy $uv \notin E$. Ekkor legyen P az a legrövidebb $G[X]$-beli út, ami u egy szomszédját összeköti v egy szomszédjával. Ilyen biztosan létezik, mivel X összefüggő. Láttuk, hogy W minden csúcsával szomszédos u és v, kiválasztjuk $w \in W$ csúcsot. Ekkor az (u, P, v, w, u) legalább 4 hosszú körben nincs átló, mivel P-t a legrövidebbnek választottuk és w-ből nem vezet él X-be. Ez ellentmond a gráf merevkörűségének, így $uv \in E$.

Így van szimpliciális csúcs W-ben, aminek $N(X)$-beli szomszédai klikket feszítenek. A bizonyítás indukciót használ, ha $|W| > 1$ és van olyan csúcsa, melynek szomszédai nem alkotnak klikket, akkor a fenti eljárást alkalmazzuk W-re, végül szimpliciális csúcsot kapunk.□

A páros gráfok tulajdonságait gyakran használjuk hipergráfok jellemzése kapcsán. Egy $H{=}(V{,}\varepsilon)$ hipergráfot teljesen kiegyensúlyozottnak nevezünk, ha csúcs-hiperél illeszkedési mátrixa teljesen kiegyensúlyozott, azaz ha a csúcsok és élek halmazán definiált páros gráf átlós páros gráf. Azt mondjuk, hogy egy halmazrendszer lánc, ha bármely két X, Y részhalmazára $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$ teljesül.

7.3. Megfigyelés. *Minden teljesen kiegyensúlyozott $H{=}(V,\varepsilon)$ hipergráfnak ($V \neq 0$) van olyan csúcsa, hogy az őt tartalmazó hiperélek láncot alkotnak.*

Bizonyítás: A teljesen kiegyensúlyozott hipergráfhoz tartozó mátrixnak van Γ-nélküli rendezése, ahol az első sorhoz tartozó csúcs biztosan szimpliciális. □

További gondolkodásra ösztönző kérdések, hogyan találhatjuk meg hatékonyan az átlós páros gráf éleinek sorrendjét, hogy minden él szimpliciális éle a sorrendben rákövetkező élek által meghatározott gráfnak. Ehhez segítség lehet egy jó feltétel megfogalmazása arra az esetre, hogy ha a páros gráf egyik csúcshalmazát fix sorrendűnek tekintjük és azt vizgsáljuk, hogy csak a másik osztály csúcsainak sorrendezésével mikor érhető el az éleken definiált szimpliciális sorrend. Az átlós páros gráfok esetén jól kihasználható tulajdonságot ígér, hogy nincs legalább 6 hosszú átlómentes kör a gráfban.

7.5. Biszimpliciális élek páros gráfokban

M. Bomhoff és B. Manthey a páros gráfok biszimpliciális élei és a Gauss elimináció során célszerűen választandó pivot elemek között nézték a kapcsolatot, ebben a részben a [10] cikkjük alapján foglaljuk össze eredményeiket. Az elimináció során a pivot választásakor azt az igényt tartjuk szem előtt, hogy minél kevesebb 0 elem váljon nem nullává a mátrixban. Vagyis az algoritmus lépései során a mátrix változásának feljegyzéséhez kevés tárhely felhasználására törekszünk, angol kifejezéssel élve a *fill-in* elkerülése érdekében választjuk a pivot elemeket. A továbbiakban Q egy $n \times n$-es 0-1 értékű mátrixot jelöl. Mivel a Gauss kiküszöbölés algoritmusának tárhelye szempontjából elég azt vizsgálni, hogy a mátrix eleme 0 vagy nem 0, a jelen vizsgálódás megállapításai kiterjeszthetőek valós elemű mátrixokra. A Q mátrixhoz megfeleltetünk egy $G =(S, T; E)$ páros gráfot, hogy a mátrix minden sorához tartozik egy S-beli, minden oszlopához egy T-beli csúcs a gráfban, valamint $s_i t_j \in E$ $(i \in S, j \in T)$ akkor és csak akkor, ha a mátrix i-edik sorának j-edik oszlopában lévő elem nem nulla.

A Gauss elimináció során a nem nulla elemekkel való feltöltődéstől megóvható mátrixoknak megfeleltetett páros gráfok épp az átlós páros gráfok, ugyanis egy szimpliciális élhez tartozó pivotelemet választva a mátrix nulla elemei nullák maradnak. A továbbiakban bemutatunk egy algoritmust a páros gráfok szimpliciális éleinek megtalálására. A cikk szerzői páros gráfok esetén a szimpliciális csúcsnak megfelelő élet biszimpliciálsnak nevezik, az alábbi definíció alapján mi is ezt használjuk a továbbiakban.

7.2. Definíció. *A G=$(S, T; E)$ páros gráf $st \in E$ élét biszimpliciálisnak nevezzük, ha az $s \in S$ és $t \in T$ csúcsok szomszédai által meghatározott $G[\Gamma(s) \cup \Gamma(t)]$ gráf teljes páros gráf.*

Az m élű páros gráf egy adott éléről $O(m)$ idő alatt lehetséges eldönteni, hogy biszimpliciális-e. Tehát biszimpliciális él keresése lehetséges legfeljebb $O(m^2)$ időben. Az itt tárgyalt algoritmus futási ideje $O(nm)$, ahol n a csúcsok száma. A biszimpliciális élek keresésére először jelölteket sorakoztat fel az algoritmus. Nem minden jelölt biszimpliciális és nem minden biszimpliciális él van felsorolva a jelöltek között. Az alább megfogalmazott lemmák alapján gyorsan kiválaszthatóak a biszimpliciális élek a jelöltek közül, valamint a jelöltek között nem felsorolt biszimpliciális elemek megtalálására is jól ellenőrizhető feltételt fogalmazunk meg.

7.1. Lemma. *Ha a G=$(S,T;E)$ páros gráf $st \in E$ éle biszimpliciális, akkor $\delta(s) \leq min_{s' \in \Gamma(t)} \delta(s')$ és $\delta(t) \leq min_{t' \in \Gamma(s)} \delta(t')$.*

Bizonyítás: Legyen $st \in E$ biszimpliciális él és $A \subseteq E$ az $s \in S$ és $t \in T$ csúcsok szomszédai által feszített teljes páros gráf. Indirekt tegyük fel, hogy $s' \in \Gamma(t)$ csúcs fokszáma kisebb, mint

s fokszáma. Akkor van olyan $t' \in \Gamma(s)$, hogy $s't' \notin E$. De akkor s és t csúcsok szomszédai nem feszíthetnének teljes páros gráfot, st nem lehetne biszimpliciális ellentmondva a lemma feltételének.□

A mátrixok nyelvére lefordítva a fenti lemma azzal a jelentéssel bír, hogy egy $Q(i;j)$=1 elem akkor tartozhat biszimpliciális élhez, ha a mátrix i. sorában lévő 1-esek oszlopai közül a j. oszlopbeli elemek összege a legkisebb, illetve a j. oszlopbeli 1-esek sorai közül az i. sor elemeinek összege a legkisebb. Az algoritmus első része a jelölteket ennek a tulajdonságnak a teljesülése alapján válogatjuk. A továbbiakban a gráf biszimpliciális élére és a neki megfelelő elemre a mátrixban is biszimpliciális elemként hivatkozunk.

Algoritmus [jelöltek felsorakoztatása a biszimpliciális elemek megtalálására]

1. A Q mátrixnak minden sorára és oszlopára kiszámolni az elemeik összegét.
2. A mátrix minden i sorára meghatározni azt a c_i oszlopindexet, ahol $Q(i, c_i)$= 1 és c_i oszlopösszege a legkisebb az i. sorban 1-est tartalmazó oszlopok közül; ha az i. sor minden eleme 0, akkor $c_i := 0$.
3. A mátrix minden j oszlopára meghatározni azt az r_j sorindexet, ahol $Q(r_j, j)$= 1 és r_j sorösszege a legkisebb a j. oszlopban 1-est tartalmazó sorok közül; ha a j. oszlop minden eleme 0, akkor $r_j := 0$.
4. Kiválasztani a mátrix azon elemeit jelöltnek, amikre $Q(i, j)$= 1 és $r_j = i$ $c_i = j$.

Az algoritmus minden lépésének futási ideje legfeljebb $O(n^2)$. A 4. lépésben legalább 1, legfeljebb n jelöltet kapunk. Ez a jelöltek számára vonatkozó korlát fontos a futási idő becslésében. A következő két lemma a jelöltek és a biszimpliciális elemek közötti kapcsolatot írja le.

7.2. Lemma. *Az i, j, j' indexekre az alábbiak teljesülnek:*

1. *$Q(i, j)$= 1 és $Q(i, j')$= 1*
2. *q_j és $q_{j'}$ oszlopok ugyanannyi 1-est tartalmaznak*
3. *ij elem biszimpliciális.*

Ekkor ij' elem is biszimpliciális, valamint q_j és $q_{j'}$ oszlopvektorok megegyeznek. A szimmetria miatt ugyanez érvényes akkor is, ha oszlopok helyett sorokra fogalmazzuk meg a lemmát.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a mátrix q_j és $q_{j'}$ oszlopvektorai nem identikus. Mivel ugyanannyi 1-est tartalmaznak, ekkor van olyan i' sor, hogy $Q(i', j)$= 1 és $Q(i', j')$= 0 (azaz Γ

részmátrixot találtunk). Így azonban ij elem nem lehetne biszimpliciális. Tehát j és j' oszlopoknak meg kell egyezniük egymással. A szimmetria miatt ekkor ij' is biszimpliciális. □

7.3. Lemma. *Ha $i'j'$ biszimpliciális elem, akkor vannak olyan $i \leq i'$ és $j \leq j'$ indexek, hogy i és i' sorok megyegyeznek, j és j' oszlopok megegyeznek, valamint ij biszimpliciális elemet jelöltnek választotta az algoritmus.*

Bizonyítás: Legyen $j \leq j'$ az a legkisebb indexű olyan oszlop, amire $Q(i', j)= 1$ és ugyanannyi 1-est tartalmaz, mint a j'. oszlop. Az előző lemma miatt ekkor $Q(i', j)$ is biszimpliciális elem és q_j oszlopvektor megegyezik $q_{j'}$ oszlopvektorral, ezek a legkisebb oszlopösszegűek azok között, amiknek 1-es van az i'. sorukban. A szimmetria miatt van ilyen tulajdonságú $i \leq i'$ indexű sor is. Mivel ij' és $i'j$ biszimpliciális elemek, ${}_iq$ és ${}_{i'}q$, q_j és $q_{j'}$ megegyeznek, így ij elem is biszimpliciális, valamint a legkisebb indexű biszimpliciális az i. sorban és j. oszlopban, tehát az algoritmus jelöltnek választotta. □

Az alábbiakban kiegészítjük a fent definiált algoritmust a következő lépésekkel, hogy az összes biszimpliciális elemet megtaláljuk a mátrixban:

1. Minden jelöltet teszteljünk, hogy biszimpliciális elem-e. (Ez lehetséges $O(n^2)$ idő alatt.)

2. Minden biszimpliciális $Q(i, j)$ jelöltre azokat a $Q(i', j')$ elemeket is válasszuk ki biszimpliciálisnak, ahol $Q(i', j)= 1$ és i'. sorban ugyanannyi 1-es van, mint az i. sorban, valamint $Q(i, j')= 1$ és a j'. oszlopban ugyanannyi 1-es van, mint a j. oszlopban.

Az így kiegészített algoritmus minden biszimpliciális elemet megtalál a mátrixban $O(n^3)$ idő alatt. A cikk szerzői bizonyították, hogy az algoritmus lépésszáma véletlen gráfok esetén az input méretében lineáris, mivel az első lépésben állított jelöltek számának várható értéke kicsi.

8. Összefoglalás

A dolgozat első részében az elemszám-homogén halmazrendszerek poliéderes leírásával foglalkoztunk. Előre megadott elemszámú halmazok incidenciavektorainak a konvex burkára fogalmaztunk meg egyenlőtlenségeket. A szakirodalom feldolgozásában tanulságos volt, ahogy az egyre általánosabb struktúrákon definiált problémára hogyan változik a tiltott halmaz egyenlőtlenségek alakja. Figyelemmel kísértük, hogy a meghatározott korlátok érvényességének bizonyításában milyen módszerek álltak a rendelkezésre. További gondolkodásra ösztönző a teljesen duálisan egészértékű leírás megtalálása.

A dolgozat második felében a mátrixokhoz definiált bi-lexikus rendezést vizsgáltuk. Érdekes volt a mátrixoknál megfigyelt tulajdonságokat a gráfok nyelvére lefordítani. Foglalkoztunk a teljesen kiegyensúlyozott mátrixok jellemzésével és felismerésével. A gráfok lexikus sorrendjét tudtuk alkalmazni a merevkörű gráfok jellemzéséhez. Kiderült, hogy merevkörű gráfoknál a lexikus sorrend szimpliciális sorrendet határoz meg. További gondolkodásra indít az átlós páros gráfok élein meghatározható szimpliciális sorrendre algoritmus keresése. Valamint megfogalmazni arra egy feltételt, hogy a bi-lexikus sorrend mikor állítható elő, ha csak az oszlopok sorrendjét változtathatjuk.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Frank Andrásnak azt a sok időt és figyelmet, amit a munkámnak szánt. Érdekes kérdéseivel és tanácsaival jó útmutatást adott a téma feldolgozásához. Továbbá köszönöm Pap Júliának a dolgozat első részében való segítségét és tanácsait.

Hivatkozások

[1] Martin Grötschel: *Cardinality homogeneous set systems, Cycles in matroids and associated polytopes*, Götschel, Martin (ed.), The sharpest cut. The impact of Manfred Padberg and his work. MPS/SIAM Series on Optimization, 2004, 99-120

[2] Jean Francois Maurras, Rüdiger Stephan: *On the cardinality constrained matroid polytope*, Networks, 2010

[3] Jean Francois Maurras, Ingo Spiegelberg, Rüdiger Stephan: *On cardinality constrained polymatroids*, Discrete Applied Mathematics, 2011

[4] Saturo Fujishige, Jens Massberg: *Dual consistent systems of linear inequalities and cardinality constrained polytopes*, RIMS-1734, 2011

[5] Jean Francois Maurras: *An example of dual polytopes in the unit hypercube*, Annals of Discrete Mathematics, 1977, 391-392

[6] Anna Lubiw: *Orderings and some combinatorial optimization problems with geometric applications*, 1985

[7] Martin Farber: *Characterizations of strongly chordal graphs*, Discrete Mathematics 43, 1983, 173-189

[8] Seifollah Louis Hakimi: *On the Realizability of a Set of Integers as Degrees of the Vertices of a Graph*, 1962

[9] Václav Havel: *A remark on the existence of finite graphs*, 1955

[10] Matthijs Bomhoff, Bodo Manthey: *Bisimplicial Edges in Bipartite Graphs*, 2011

[11] Alexander Schrijver: *Combinatorial Optimization. Polyhedra and Efficiency. Balanced and unimodular hypergraphs*, 1439-1450, Springer