Alkalmazott matematikus szak
Záróvizsga kérdései

A: Törzsanyag

Al1. Lineáris Algebra

Vektortér, lineáris függetlenség, generátorrendszer, bázis. Dimenzió, egyértelműsége.

Lineáris leképezés, lin. transzformáció, mátrixuk. Mátrixműveletek. Determináns, tulajdonságai. Lineáris egyenletrendszerek, megoldásuk, Cramer-szabály.

Sajátérték, sajátvektor, karakterisztikus-, minimálpolinom, Cayley-Hamilton tétel.

Bilineáris függvények, mátrixuk. Ortogonális bázis létezése. Sylvester-féle tehetetlenségi tétel. Valós és komplex euklideszi terek. Adjungált; unitér, önadjungált és normális lineáris transzformációk.

Al2. Csoportok, polinomok, Galois-elmélet

Csoport (példák!), részcsoport, izomorfizmus, homomorfizmus. Mellékosztályok, Lagrange tétele. Normálosztó, faktorcsoport. Homomorfizmustétel, izomorfizmustételek. Jordan-Hölder tétel. Permutációcsoportok, S_n, A_n (egyszerűsége $n \geq 5$ esetén). p-csoportok, Sylow-tételek. Feloldható csoportok. Véges Abel-csoportok alaptétele.

$K[x]$ polinomgyűrű, gyöktényezős felbontás, többszörös gyökök. Rezultáns, diszkrimináns. Másod-, harmad- és negyedfokú egyenletek megoldása $\mathbb{C}$ felett.

Többváltozós polinomok, szimmetrikus polinomok alaptétele.

Testbővítések, egyszerű bőv., véges bőv., algebrai bőv. Felbontási test. Normális és szeparábilis bővítések. Körosztási testek. Geometriai szerkeszthetőség. Véges testek.

Galois-csoport. A Galois-elmélet alaptétele. Egyenletek megoldhatósága gyökjelekkel.

Al3. Egyéb algebrai struktúrák

Gyűrűk (példák!), részgyűrű, ideál, homomorfizmustétel. Egységelemes, kommutatív, ill. nullosztómentes gyűrűk. Hányadostest. Főideálgyűrűk, euklideszi gyűrűk. Noether-gyűrűk, Hilbert bázistétele.

Számelmélet gyűrűkben; prím-, irreducibilis elemek, norma. Algebrai számok, algebrai egészek. Nevezetes transzcendens számok.

Részben rendezett halmazok , hálók. Moduláris, disztributív hálók; jellemzésük tiltott részhálókkal. Teljes hálók, algebrai hálók.

An1. Analízis

Valós számok. R^n. Sorozatok. Konvergencia. $(1 + 1/n)^n$. Exponenciális függvény, hatványozás. Végtelen sorok, konvergencia-kritériumok. Cauchy-Hadamard tétel. Konkrét Tayor sorok (sin, cos, binomiális, arctg). L'Hospital szabály.

An2. Analízis

Folytonosság. Határérték. Egyenletes folytonosság. Valós-valós függvények differenciálhatósága. Differenciálási szabályok. Rolle-, Lagrange, Darboux-tételek. Magasabb deriváltak, Taylor formula. Többdimenziós differenciálás.

An3. Analízis

Primitív függvény. Riemann-integrál. Integrálási alapképletek és szabályok. Racionális törtfüggvények integrálása, racionalizáló helyettesítések. Newton-Leibniz formula. Alkalmazások: Wallis-, Stirling-formula. Improprius integrál. $\int_0^\infty sinx/x$, $\int_0^\infty exp(-x^2)$. Ívhossz.

An4. Analízis

Riemann-Stieltjes integrál, vonalintegrál. Paraméteres integrálok. Jordan-mérték. Többdimenziós Riemann-integrál. Lebontási (Fubini-)tétel. Gauss-tétel ($G_x - F_y$ integrálljáról). Feltételek síktartomány $\to R^2$ leképezés primitívfüggvény létezésére.

An5. Analízis

Absztrakt mérték és integrál-elmélet. Mérhető tér, mérhető leképezések. Borel halmazok. Integrál mértékterekben. Beppo-Levi-tétel, Fatou-lemma, Lebesgue dominált konvergencia tétele. Lebesgue-mérték, Lebesgue–integrál

Cs1. Véges matematika

Gráfok összefüggőségei, párosításai, színezései. Síkgráfok. Extremális és Ramsey típusú tételek. Gráfalgoritmusok (keresések, feszítőfa, párosítás, legrövidebb utak, folyamok).

Cs2. Számítástudomány

Számítógép-modellek, reguláris nyelvek, eldönthetőség. {Kolmogorov-komplexitás.} Bonyolultsági osztályok, NP-teljesség.

D1. Közönséges differenciálegyenletek

Elsőrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásának létezése és egyértelműsége. A lineáris rendszer megoldásainak előállítása.

D2. Parciális differenciálegyenletek

A másodrendű parciális differenciálegyenletekre vonatkozó feladatok klasszikus es általánosított megoldásai

F1. Fourier–sorok

Trigonometrikus Fourier–sorok és Fourier–transzformáció

Fourier–transzformáció az $L^1(\mathbb{R})$ és az $L^2(\mathbb{R})$ téren. Tulajdonságai, konvolúció, inverziós formula, kapcsolat a deriválttal. Fourier–sorok konvergenciája és szummációja. Diszkrét Fourier–transzformált, FFT-algoritmusok.

F2. Funkcionálanalízis

Banach- és Hilbert-terek és operátorainak alaptételei.

G1. Geometria

Konvex, projektív és differenciálgeometria

Affin terek konvex halmazai, poliéderek, politópok, a projektív geometria elemei, másodrendű görbék, görbület, torzió, Frenet-formulák, felületek görbületi mennyiségei, felületi pontok osztályozása.

I1. Informatika

Adjon áttekintést azokról az alapvető adatszervezési és algoritmus tervezési technikákról, melyekkel a keresési, rendezési és kiválasztási feladatokat hatékonyan tudjuk megoldani.

K1. Komplex függvénytan

Reguláris függvény. Hatvány és Laurent sorfejtés. Izolált szingularitások. Integráltételek. Reguláris függvények sorozatai. Konform leképezések.

N1. Numerikus lineáris algebra

a) A Gauss elimináció és az LU felbontás kapcsolata. Főelemkiválasztási stratégiák teli és ritka mátrixok esetén.

b) Az általánosított inverz definíciója, egyértelműsége. A teljes rangú mátrixok esete. Alkalmazás görbeillesztésre.

d) Vektornormák; illeszkedő és indukált mátrixnormák. A mátrixnormák és a spektrálsugár kapcsolata. Rekurzív vektorsorozatok konvergenciája.

N2. A függvényközelítés numerikus módszerei

Interpoláció: Lagrange, Hermite, spline; legkisebb négyzetek, egyenletesen legjobb közelítés.

N3. Integrálok numerikus kiszámítása, közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

Elemi képletek, összetett képletek és konvergenciájuk folytonos függvényeken; Gauss-kvadratúrák; közönséges differenciálegyenletek megoldása: konzisztencia, stabilitás, konvergencia; Runge-Kutta és többlépéses módszerek.

O1. Operációkutatás

Dualitás a lineáris programozásban

Farkas lemma, a korlátosság feltétele, dualitás tétel, optimalitási kritériumok, a szimplex algoritmus és végességének bizonyítása Bland szabállyal.

V1. Valószínűségszámítás

Valószínűségeloszlások, függetlenség. Valószínűségi változók, vektorváltozók és jellemzőik. Konvergenciafajták, kapcsolataik. Nagy számok gyenge és erős törvényei. Karakterisztikus függvény, határeloszlás–tételek. A feltételes várható érték fogalma és tulajdonságai. Martingálok, szubmartingálok, martingálkonvergencia–tételek.

V2. Sztochasztikus folyamatok

Poisson folyamat. Diszkrét paraméterű Markov–láncok (visszatérőség, az átmenetvalószínűség függvény határértéke, stacionárius eloszlás). Felújítási folyamatok (a felújítási függvény, aszimptotikus viselkedés, a felújítási függvény növekményének viselkedése). A Wiener–folyamat (konstrukció, a trajektóriák elemi tulajdonságai).

V3. Matematikai statisztika

Statisztikai mező, minta. Tapasztalati eloszlás, Glivenko–Cantelli tétel. Elégséges statisztika, faktorizációs tétel, Rao–Blackwell tétel. Fisher–információ, Cramer–Rao egyenlőtlenség. Pontbecslések tulajdonságai, maximum–likelihood, momentum- és Bayes–módszer. Hipotézisvizsgálat, klasszikus próbák. Többdimenziós normális eloszlás, legkisebb négyzetes becslés és lineáris hipotézis normális lineáris modellben.

A sávok kérdései

Adatbázisok elmélete

(A két kérdésből csak egyet kap a vizsgázó.)

1) Shannon kommunikációs modellje, a Shannon entrópia, és a csatorna alaptétel. Információs rendszerek modellje, a Kolmogorov entrópia alapvető tulajdonságai.

2) Relációs lekérdező nyelvek (konjunktiv lekérdezések, a relációs algebra és a vele ekvivalens nyelvek, a nyelvek kifejező ereje es bonyolultsága). A relációs adatbázisok megszorításai es függőségei. Az alapvető függőségek, implikáció és normalizálás.

A Számítógépi Geometria sáv záróvizsga kérdései

1) Algoritmusos geometria: sokszögtrianguláció, sokszögfelbontás, két- és háromdimenziós konvex burok algoritmusok, Voronoi-diagramok, elrendezések, keresés (lokalizáció) és metszet.

2) Geometriai modellezés: interpolációs spline görbék, approximációs görbetervezési eljárások, a B-spline függvények, felületillesztési módszerek.

Számítógéptudomány sáv

(Az öt kérdésből csak egyet kap a vizsgázó.)

1) Kupacok és szótárak, alkalmazásaik. Önkiegyensúlyozó struktúrák, amortizációs idő.

2) Randomizált algoritmusok és osztályok, kommunikációs bonyolultság, döntési fák és döntési programok. Boole-hálózatok. Kriptográfia.

3) Gráfok színezése, nagy kromatikus számú gráfok konstrukciói, perfekt gráfok, extremális és Ramsey típusú tételek. A paritás szerepe gráfelméleti problémákban.

4) Szimmetrikus struktúrák. Véletlen struktúrák és módszerek.

5) Konvex burok keresése (síkban és térben), alkalmazás Voronoi diagrammokra és Delaunay háromszögelésre. Síkdarabolások. Nagy konvex sokszögek.

Dinamikai rendszerek és matematikai modellezés

(A három kérdésből csak egyet kap a vizsgázó.)

1) Operátor félcsoportok és alkalmazásuk a Dirichlet-féle peremfeltételű hővezetési egyenletre. (Hille-Yosida tétel, kontrakció félcsoportok, exponenciális stabilitás, spektrálleképezés tétel.)

2) A Lax-féle ekvivalencia tétel parabolikus differenciálegyenletekre. (Konzisztencia, stabilitás, konvergencia.)

3) Diszkrét dinamikai rendszerek: Adjunk példákat (különböző diszkrét dinamikai rendszereken szemléltetve) rendszerek különböző dinamikus tulajdonságaira és invariánsaikra!

Parciális differenciálegyenletek sáv

(A három kérdésből csak egyet kap a vizsgázó.)

1) Parciális differenciálegyenletek elmélete:
Másodrendű elliptikus egyenletek klasszikus peremérték feladatai és sajátérték feladatai variációs értelmezése

2) Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása:
A Poisson-egyenlet differencia approximációja (kettő dimenzióban) és a keletkező lineáris rendszerek megoldása többrácsos módszerrel

3) Speciális függvények:
Gamma-függvény, Bessel- függvények gömbfüggvények, elliptikus függvények.

Algebra és Számelmélet sáv

1) Prímtesztelés, faktorizáció.

2) Nyilvános kulcsú kriptográfia, RSA, diszkrét logaritmus, a Diffie–Hellman kulcs csere rendszer és annak elliptikus görbe analogonja.

Operációkutatási sávok

1. **Lineáris és nemlineáris programozás**
   (a) A lineáris programozás algoritmusai.
   (b) Dualitás tétel (gyenge és erős), Farkas tétel, Farkas lemma, Minkowski-Weyl tétel, Karush-Kuhn-Tucker tétel.
   (c) Optimalitási kritériumok a nemlineáris programozásban.
   (d) Lineáris komplementaritási feladat és kvadratikus programozás.

2. **Döntésanalízis**
   (a) Brouwer és Kakutani fixponttétele.
   (b) A játék fogalma, Nash féle egyensúlyi pont, az egyensúlyi pont létezése. Véges fával leírható játékok.
   (c) Aktív portfolió kezelés (Treynor-Black modell)
   (d) A portfolió teljesítményének a mérése (számtani és mértani közepek, Sharpe, Treynor, Jensen, értékelési hányados)
   (e) A von Neumann-Morgenstern-féle utility elmélet.
   (f) Többkritériumú döntési modellek véges sok alternatíva esetén (Wald, Hurwitz, Savage, Laplace, Yager)
   (g) Többcélú optimalizálás (Pareto optimalitás, epsilon korlátozások módszere, célprogramozás)

3. **Poliéderes kombinatorika**
   (a) Teljes unimoduláris mátrixok és alkalmazásaik.
   (b) Maximális folyam (Edmonds-Karp algoritmus).
   (c) Teljes párosítás poliéder és algoritmus (Edmonds).
   (d) Minimális költségű folyam megkonstruálása (Fulkerson), minimális vágások (Nagamochi-Ibaraki).
   (e) Teljesen duális egészértékűség és alkalmazásai (Pl. Lucctesi és Younger tétele).

4. **Egészértékű programozás**
   (a) Gomory algoritmusa.
   (b) Korlátozás és szétválasztás.
   (c) Dinamikus programozás.
   (d) Implicit leszámlálás.
   (e) Párhuzamos gépek ütemezése.

5. **Sztochasztikus problémák**
   (a) A (s,S) modell.
   (b) Sztochasztikus programozási modellek (statikus, dinamikus modellek; a korlátok és célok különböző megfogalmazása). A simple recourse feladat és megoldó módszerei.
   (c) Logkonkáv mértékek, sztochasztikus programozási feladatok konvexitása.
   (d) Valószínűségek számítása, alsó-felső korlátok, közelítések.
   (e) A kétlépcsős sztochasztikus programozási feladat és megoldó módszerei.

6. **Programcsomagok és modellek**
   (a) árrugalmasság. árbecslések. Pókháló modellek.
   (b) A dimenzió mérése.
   (c) Egy szabadon választott optimalizálási programcsomag (Excel solver, XPRESS, CPLEX).
   (d) A szimplex módszer numerikus implementációja.
   (e) A hátizsák feladatra vezető problémák.
   (f) Az utazó ügynök feladatra vezető problémák.

7. **Közgazdaságtan**

   (a) A háztartások és a vállalatok viselkedési modellje.

   (b) Az állam szerepe az egyensúlyi politikában.

   (c) A monopólium, árdiszkrimináció, vertikális és horizontális megkülönböztetés.

   (d) A szerelőszalag kiegyensúlyozása.

   (e) A költség minimalizálásának és a profit maximalizálásának axiómái.

Alkalmazott statisztika sáv

1. A többdimenziós normális eloszlás és tulajdonságai. A Wishart eloszlás. Többdimenziós normális eloszlás paramétereire vonatkozó becslés és hipotézisvizsgálat.

2. A változók közötti kapcsolat mérése. Korrelációanalízis. Faktor- és főkomponens analízis. Kanonikus korrelációk.

3. Regresszióanalízis, becslés és hipotézisvizsgálat lineáris modellben. Alkalmazások.

4. Kontingenciatáblák elemzése. Maximum likelihood becslés, loglineáris modellek. Explicit maximum likelihood becslés. Algoritmusok a becslés meghatározására.

5. Idősorok statisztikai analízise.

Pénzügyi folyamatok elemzése

1. Pénzügyi alapfogalmak: részény, bankbetét, kamatlábak, forward, futures, opciók, arbitrázs, hedge. Diszkrét árfolyamváltozások: önfinanszírozó stratégiák, ekvivalens martingálmérték. Piaci teljesség és arbitrázsmentesség, Cox-Ross-Rubinstein modell.

2. Folytonos árfolyamváltozások: geometriai Brown-mozgás, sztochasztikus integrál, sztochasztikus differenciálegyenletek. Girsanov-tétel. Önfinanszírozó stratégiák, arbitrázsmentesség.

3. Európai opciók árazása diszkrét és folytonos időben. Amerikai opciók árazása diszkrét időben. Black–Scholes-formula a piaci dinamika alapján és mint a Cox–Ross–Rubinstein-modell határértéke.

4. Wilkie-féle inflációmodellek.

5. Sztochasztikus kamatintenzítás: Vasicek és Hull–Vasicek modellek, kötvényopciók.

6. VaR modellek jellemzői: kötvények és derivatívok kockáztatott értéke, portfoliók kockázata, kockázatok előrejelzése.

Biztosításmatematika

1. Az életbiztosítások díjkalkulációjának alapelve, nettó és bruttó díjak számítása.

2. Az életbiztozások díjtartalékainak számítása.

3. Az összetett kockázat modellje: nevezetes kár- és kárszámeloszlások, önrész és infláció hatása, Panjer-rekurzió.

4. Díjkalkulációs elvek és tulajdonságaik.

5. Különféle viszontbiztosítási formák. A viszontbiztosítási formák optimalitási tulajdonságai.

6. Sztochasztikus modellek kockázati folyamatokra. A tönkremenés valószínűsége klasszikus kockázati folyamat esetén. A csőd súlyosságára vonatkozó egyenlet. Lundberg-kitevő. Martingálelméleti módszerek alkalmazása.

7. A tönkremenés valószínűségének aszimptotikája szubexponenciális eloszlások esetén. Felújítási modellek alkalmazása kockzázati folyamatokban.

Rendszerelmélet és képfeldolgozás sáv

1. Lineáris rendszerek alaptulajdonságai, irányíthatóság, megfigyelhetőség, minimalitás. Kanonikus realizációk. Stabilizálhatóság és detektálhatóság.

2. Zavarszűrés, stabilizálással. (A, B)-invariáns alterek, irányíthatósági alterek.

3. Külső és belső leírások. Parciális realizációk.

4. Lineáris kvadratikus optimális irányítás. Riccati-féle differenciálegyenlet és a megoldás aszimptotikus viselkedése.

5. Sztochasztikus rendszerek szűrése és optimális irányítása. Dualitás-elv. Sztochasztikus rendszerek realizációelmélete.

6. Lineáris sztochasztikus rendszerek paramétereinek becslése, aszimptotikus tulajdonságok.