Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny
2000. október 27-november 6.

1. Lássuk be, hogy van olyan $f : [\omega_1]^2 \to \omega_1$ függvény, amelyre
(i) $f(\alpha, \beta) < \min\{\alpha, \beta\}$, ha $\min\{\alpha, \beta\} > 0$;
(ii) ha $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_i < ... < \omega_1$, akkor $\sup\{\alpha_i : i < \omega\} = \sup\{f(\alpha_i, \alpha_j) : i, j < \omega\}$.

2. Adott egy körön n piros és n kék ív úgy, hogy bármely piros ív metsz bármely kék ívet. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pont a körön, melyet legalább n színes ív fed le.

3. Mutassuk meg, hogy minden $n \geq 3$ egész számra van olyan $N(n)$ egész, hogy teljesül a következő: ha P egy legalább $N(n)$ elemű síkbeli ponthalmaz, melynek bármely három pontja olyan valódi háromszöget határoz meg, mely a belsejében legfeljebb egy P-beli pontot tartalmaz, akkor P pontjai közül kiválaszthatók egy olyan konvex n-szög csúcsai, melynek belsejébe egyetlen további pontja sem esik P-nek.

4. Legyenek $a_1 < a_2 < a_3$ pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy vannak olyan x_1, x_2, x_3 egészek, nem mindegyik 0, hogy $\sum_{i=1}^3 a_i x_i = 0$ és

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a_3} + 1.$$

Mutassuk meg, hogy a $2/\sqrt{3}$ helyébe kisebb számot írva az állítás nem marad igaz.

5. Igazoljuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan n és vannak olyan pozitív $\{a_k\}_{k=1}^n$ számok, hogy $\varepsilon < x < 2\pi - \varepsilon$ esetén

$$\sum_{k=1}^n a_k \cos kx < -\frac{1}{\varepsilon} \left| \sum_{k=1}^n a_k \sin kx \right|.$$

6. Adott a számegyenes felbontása két nem-megszámlálható Borel halmazra. Mutassuk meg, hogy az egyik halmaznak van olyan eltoltja, amely a másikat nem-megszámlálható halmazban metszi.

7. Legyen $H(D)$ a $D = \{z : |z| < 1\}$ komplex egységkörön holomorf függvények tere a D-beli kompakt halmazokon való egyenletes konvergencia által megadott topológiával ellátva. Vezessük be $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ esetén az $S_n(f,z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$ jelölést. Nevezzünk egy $f \in H(D)$ függvényt univerzálisnak, ha tetszőleges, az egységkör határán folytonos, komplex értékű g függvényt véve, alkalmas $S_{n(j)}(f,z)$ részletösszegek minden $A_\varepsilon = \{z = e^{it} : 0 \le t \le 2\pi - \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ íven egyenletesen approximálják a g függvényt.

Bizonyítsuk be, hogy $H(D)$-nek van olyan sűrű G_δ részhalmaza, melynek minden eleme univerzális.

8. Bizonyítandó, hogy ha az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ leképezésre teljesül, hogy összefüggő halmaz képe összefüggő és kompakt halmaz képe kompakt, akkor f folytonos.

9. Legyen M zárt, irányítható, 3-dimenziós differenciálható sokaság, és tegyük fel, hogy G az M irányítástartó diffeomorfizmusainak véges csoportja. Jelölje P, illetve Q azon M-beli pontok halmazát, amelyek stabilizátora G-nek több, mint egyelemű, illetve nem-ciklikus részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy P Euler-karakterisztikája osztható G rendjével, továbbá, hogy a Q halmaz $-2\frac{\chi(P)}{|G|}$ darab G szerinti orbit egyesítése, ahol $\chi(P)$ jelöli P Euler-karakterisztikáját.

10. Ákos 4, egymástól független véletlen számot generál a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlás szerint. Ezek közül az egyiket megmutatja Bálintnak, akinek meg kell tippelnie, hogy a látott szám "szélső"-e, azaz a négy szám közül a legkisebb vagy a legnagyobb valamelyike. Van-e Ákosnak olyan determinisztikus stratégiája, amely mellett Bálint találati valószínűsége nem haladhatja meg az 1/2-et, akárhogyan okoskodjék is?

November 7-én, kedden délután 4 órai kezdettel a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Nagytermében megbeszéljük a verseny feladatait. Az intézet címe: Budapest, V. Reáltanoda utca 13-15.

Minden érdeklődőt szívesen látunk.

(http://www.bolyai.hu/schweitzer.html)